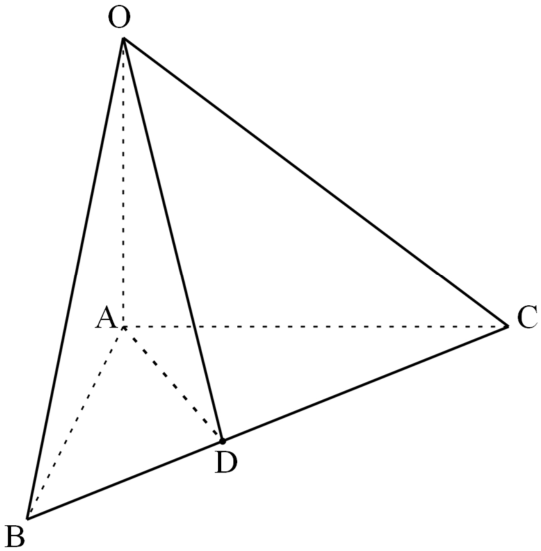
| 没にした空間図形（問題追加） | | |
|---|---|---|
| 範囲：空間図形 | 難易度：★×5 | 得点　　　　　　/12 |

出典：オリジナル

下の図のように，OA⊥△ABC，∠BAC＝90° の三角錐 O-ABC があります。∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とします。

OA＝1，AB：AC＝1：2，BC＝$3\sqrt{5}$ のとき，次の問いに答えなさい。




（1）OD の長さを求めなさい。計算過程も書きなさい。

（2）線分 OC 上に点 P をとり，線分 BP と OD の交点を Q とします。
立体 AOBQ と立体 AQDCP の体積が等しくなるとき，OQ の長さを求めなさい。

【解答例】

$t>0$ で，AB＝$t$ とすると，AC＝$2t$

$t^2+(2t)^2=\left(3\sqrt{5}\right)^2$，$5t^2=45$，これを解いて，$t=3$

よってAB＝3，AC＝6……①

（ADは∠BACの二等分線だから）AB：AC＝BD：DCなので，

BD：DC＝1：2……②

AB上に∠DEA＝90°となる点Eをとると，

△BDE∽△BCAよりDE：CA＝1：3となるからDE＝2（※1）

△ADEは直角二等辺三角形なので，AD＝$\sqrt{2}$DE＝$2\sqrt{2}$

したがって，OD＝$\sqrt{1^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\mathbf{3}$

（※1）北海道の計算過程書かせる問題では，相似の証明まではしなくてよい。

＜部分点＞

・①　ABの長さかACの長さが求められている……2点

・②が求められている……2点

【別解】②までは上記と同じ

よって，BD＝$\sqrt{5}$，DC＝$2\sqrt{5}$となる。

AD＝$\sqrt{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}-\mathrm{BD}\times\mathrm{DC}}=\sqrt{18-10}=2\sqrt{2}$（※2）

OD＝$\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\mathbf{3}$

（※2）中学では習わない公式，詳しくは角の二等分線公式とでもググる

【いないと思うけどベクトルを使った場合】②までは上記と同じ

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$なので，

$\left|\overrightarrow{OD}\right|^2=1+\frac{4}{9}\cdot 9+\frac{1}{9}\cdot 36+\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OA}$

OA⊥△ABC，AB⊥ACなので，$\left|\overrightarrow{OD}\right|^2=9$　したがって，**OD＝3**

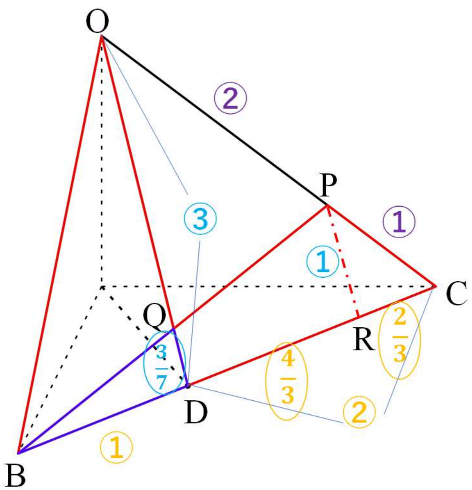
（2）（4 点）https://hokkaimath.jp/

三角錐 A-OBQ と四角錐 A-QDCP はどちらも A を頂点とし，
△OBQ も四角形QDCP も同一平面上にあるので，高さが等しくなる。結局，
体積が等しくなるとき，△OBQ＝四角形 QDCP となる。

さらに，△OBD＝△OBQ＋△BDQ，△PBC＝四角形 QDCP＋△BDQ なので，
△OBQ＝四角形 QDCP のとき，△OBD＝△PBC となる。

よって，BD：BC＝1：3 なので，△OBD と△PBC の高さの比は 3：1 となるから，OC：PC：3：1，すなわち，OP：PC＝2：1 となる。

＜解法 1＞中学生らしく




点 P から OD に平行な直線を引き，
BC との交点を R とする。

$PR:OD=1:3$

$CR:RD=1:2=\frac{2}{3}:\frac{4}{3}$ より，

$BD:DR=1:\frac{4}{3}=3:4$

$QD:PR=\frac{3}{7}:1$ となるから，

$OQ:QD=\frac{18}{7}:\frac{3}{7}=6:1$

よって，$OQ=\frac{6}{7}OD=\boldsymbol{\frac{18}{7}}$　【作成】高校入試 入試 数学 良問・難問

＜解法 2＞メネラウスの定理

$\frac{QP}{PC}\times\frac{CB}{BD}\times\frac{DQ}{QO}=1$ より，$\frac{2}{1}\times\frac{3}{1}\times\frac{DQ}{QO}=1$，$\frac{DQ}{QO}=\frac{1}{6}$ だから，

$OQ=\frac{6}{7}OD=\boldsymbol{\frac{18}{7}}$