三角形最大と空間図形		
範囲：空間図形	難易度：★★★★☆	得点　　　　　/9

出典：2011 年度　茨城県

下の図 1 のように，AB＝AC＝6 cm，BC＝8 cm の二等辺三角形 ABC が平面 P 上に垂直に立っている。この△ABC において，辺 AB，BC，CA の中点をそれぞれ L，M，N とする。次に，図 2 のように，△ABC を，AM⊥P を保った状態で，線分 AM を折り目として折り曲げる。折り曲げた状態で，2 点 L，N を結び，その中点を K とする。このとき，次の（1），（2）の問いに答えなさい。

（1）∠BMC＝60° となるように折り曲げたとき，線分 LN の長さを求めなさい。

（2）△BMC の面積が最も大きくなるように折り曲げたとき，線分 KM の長さを求めなさい。

図 1

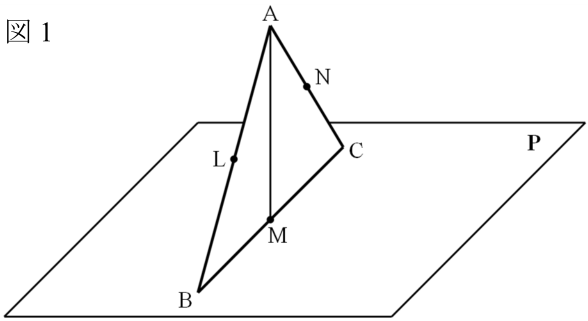
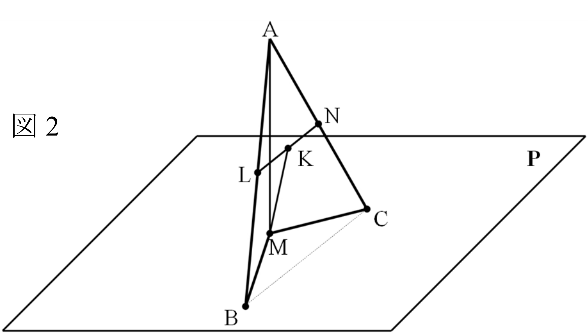


図 2



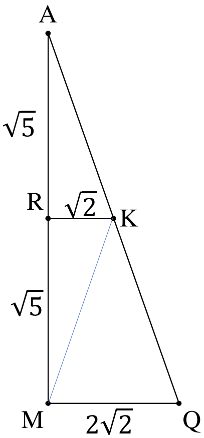
【解答例】

（1）（4 点）

△BMC は，∠BMC＝60°，BM＝MC となるから，正三角形となる。したがって BC＝4 cm，△ABC において，中点連結定理より，LN＝$\frac{1}{2}$BC＝**2 cm**

（2）（5 点）

△BMC の面積が最も大きくなるとき，∠BMC＝90° である（※）



BC の中点を Q，AM の中点を R とする。

4 点 K，R，M，Q は同一平面上にある（KR//QM)。

△ABM において，三平方の定理より，

$AM = \sqrt{36-16} = 2\sqrt{5}$だから，$AR = RM = \sqrt{5}$

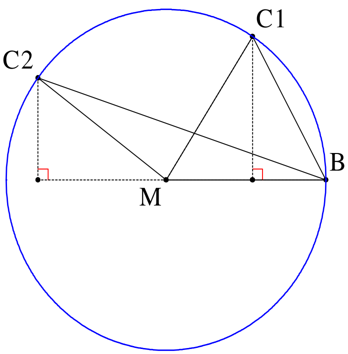
△BMC は直角二等辺三角形だから，$MQ = 2\sqrt{2}$

中点連結定理より，$RK = \sqrt{2}$

△MKR において，三平方の定理より，

$KM = \sqrt{5+2} =$ **$\sqrt{7}$ cm**

（※）



左図のように，△BMC において，BM を底辺とすると，点 C は M を中心とする半径 4 の円周上を動く。BM を底辺としたときの高さが最も大きくなれば良い。∠BMC＝90° のとき，高さ最大となる。左図を見ると，高校生は三角関数を用いた三角形の面積公式$\frac{1}{2}ab\sin\theta$を思い出す。

【コメント】

練習に丁度良い空間図形です。そこまで難しくないですが，入試本番で出されたら（2）で（分かっているのに）ミスをします。ミスしたら分かっていても 0 点。ミスしない練習。

（2），三角形が面積最大になるときの問題が出題されています。中学入試などで（※）の解説を 1 度でも見たことあれば「90°のとき最大」とすぐ気づけるのですが，高校入試のみの経験だと，意外に知らなさそう。円書くと分かります。この考え方をもっと複雑に利用した問題は，

2019 年度　膳所高校　https://hokkaimath.jp/blog-entry-198.html

です。高校生も知っておいた方が良い。

なお，某問題集においては「∠BMC＝90°のとき最大」とだけ書かれてありました。結構な中学生が丸暗記してそう。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/