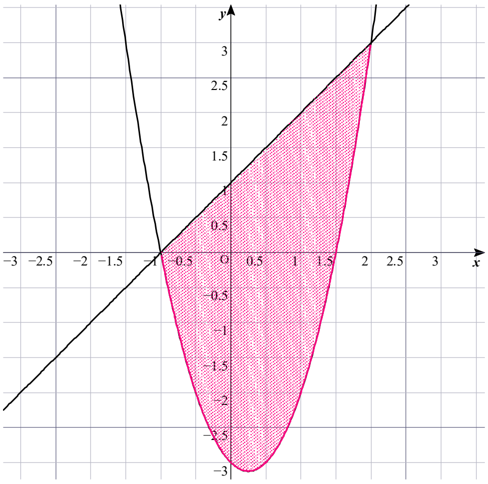
第1回：超絶有名！1/6公式

＜例 1＞

$y = 2x^2 - x - 3$ と $y = x + 1$ で囲まれた部分の面積Sを求めよ。



＜クソ真面目に解く＞

$y = 2x^2 - x - 3$ と $y = x + 1$ との交点は，

$2x^2 - x - 3 = x + 1$　これを解いて，$x = -1, 2$

$-1 \leq x \leq 2$ で，$2x^2 - x - 3 \leq x + 1$ だから，

$$S = \int_{-1}^{2} \left\{(x+1) - \left(2x^2 - x - 3\right)\right\} dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right) dx = -2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= -2\left\{\left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right\}$$

$$= -2\left(-\frac{9}{2}\right) = \mathbf{9}$$

しかし，直線と放物線で囲まれた面積を求めることがあまりにも多すぎて，次のような大学入試史上最も有名な裏技が存在する。

＜1/6 公式を用いた解答＞

$$S = \int_{-1}^{2} \left\{(x+1) - \left(2x^2 - x - 3\right)\right\} dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right) dx = -2\int_{-1}^{2} \left(x^2 - x - 2\right) dx$$

$$= -2\int_{-1}^{2} (x+1)(x-2)\, dx$$

交点を求める際に，x=2，x=－1 と解を出しているので，こう因数分解できるのは当然である。

ここで，以下の公式を用いる。

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\, dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

＜上記の証明＞

$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\, dx$　**※部分積分！**

$$= \left[\frac{(x-\alpha)^2}{2}(x-\beta)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(x-\alpha)^2}{2} dx$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\beta} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})^{\mathbf{3}}$$

＜解答の続き＞

$$-2\int_{-1}^{2} (x+1)(x-2)\, dx$$

$$= -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)(2+1)^3 = \frac{54}{6} = \mathbf{9}$$

と，大変簡単な計算で求めることができる。

ちなみにセンターとか穴埋めなら使い放題。東北大に関しては，断り入れてから使った方がよい？

＜慣れるために演習問題＞

【1】次を求めなさい。

(1) $y = x^2 - 2x - 3$ とx軸で囲まれた部分の面積

(2) $y = x$，$y = 4x - x^2$で囲まれた部分の面積

【解答】(1)$\frac{32}{3}$ (2)$\frac{9}{2}$

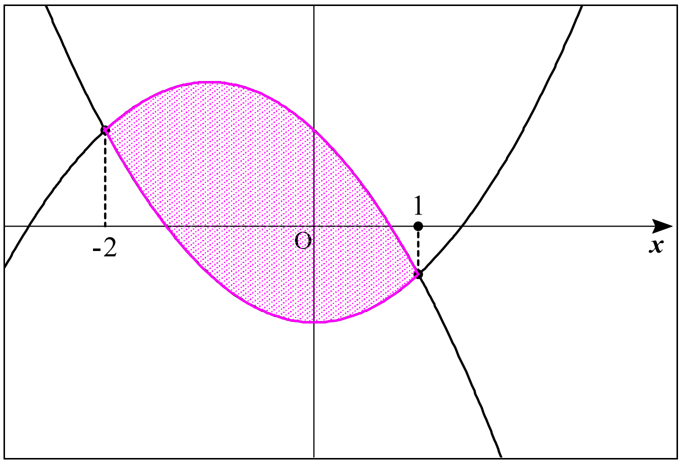
【2】次のような問題でも，1/6 公式が計算していると出てくるので，用いてみなさい。

(1) $y=x^2-2$ と，$y=-x^2-2x+2$で囲まれた部分の面積

(2) $y=x^3-x$と，$y=x^3-3x^2+2x$で囲まれた部分の面積

【解答】(1) 9 (2)$\frac{1}{2}$

・$y=x^2-2$ と，$y=-x^2-2x+2$ のグラフ

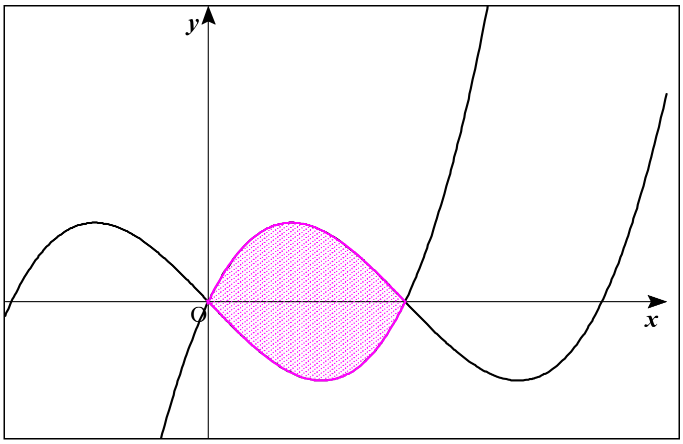


交点を求める際，$x^2-2=-x^2-2x+2$

$2x^2+2x-4=0 \quad 2(x+2)(x-1)=0$

と，二次方程式の形になる。

・$y=x^3-x$と，$y=x^3-3x^2+2x$のグラフ



こちらも，$x^3-x=x^3-3x^2+2x$

$3x^2-3x=0 \quad 3x(x-1)=0$

と，二次方程式の形になる。

上記のように，「直線と曲線」または，「曲線と曲線」で囲まれた部分の面積において，交点βから交点αまで積分するときは，積分計算の中で，

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

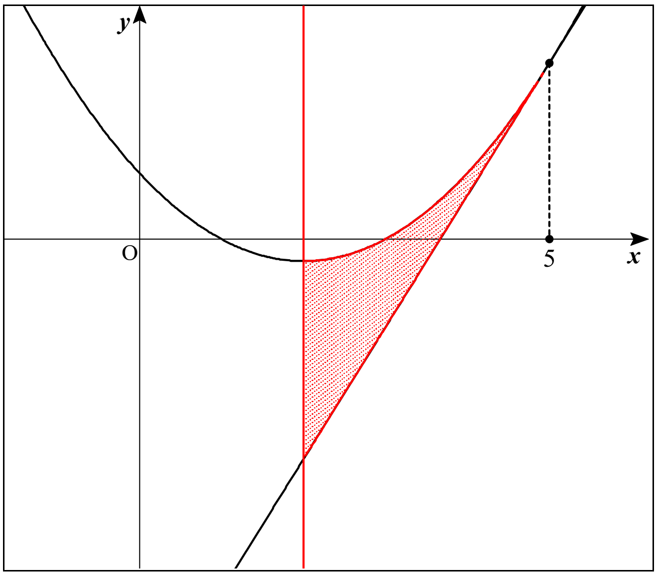
を用いることができる。**常識らしい！**

第2回：1/3公式

放物線，接線と y 軸に平行な直線に囲まれた部分の面積にも，裏技的公式が存在する。

＜例 1＞

$C: y=x^2-4x+3$ の x＝5 における接線 l を引く。x＝2 と，C，l で囲まれる部分の面積を求めよ。



＜真面目に解く＞

$y'=2x-4$より，x＝5 を代入して，$y'=6$，x＝5 における接線の方程式は，$y'=6(x-5)+8=6x-22$

求める面積は，

$$\int_2^5 \left\{\left(x^2-4x+3\right)-(6x-22)\right\}dx$$

$$=\int_2^5 (x^2-10x+25)dx$$

$$=\int_2^5 (x-5)^2\,dx=\left[\frac{(x-5)^3}{3}\right]_2^5=-\left(-\frac{27}{3}\right)=\mathbf{9}$$

接線（重解）を扱うことから，積分する関数は$(\ )^2$の形になることは当然である。

この$(\ )^2$の形を利用して，次のように一般化できる。

$C: y=ax^2+bx+c$ から，$x=\beta$ における接線lを引く。a>0，$\beta>\alpha$とし，C，l，$x=\alpha$ によって囲まれる部分の面積を求める。

$y'=2ax+b$ なので，$x=\beta$ における接線の方程式は，$y=(2a\beta+b)(x-\beta)+a\beta^2+b\beta+c$ すなわち

$y=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c$

求める面積は，

$$\int_\alpha^\beta \{\left(ax^2+bx+c\right)-(2a\beta+b)x-a\beta^2+c\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta \left(ax^2-2a\beta x-a\beta^2\right)dx$$

$$=a\int_\alpha^\beta (x-\beta)^2dx=a\bullet\frac{1}{3}\left[(x-\beta)^3\right]_\alpha^\beta=-\frac{a}{3}(\alpha-\beta)^3$$

$$=\frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3$$ ※$y=ax^2$の場合に限定して証明も可

接線があるので重解を持つ。そのため上記のようにきれいな式となる。時間短縮などのために，知っておくと，たまによいことあるかもしれないし，悪いかもしれない。たいていの問題は，接線と，y 軸に囲まれているので，$\alpha=0$ とすればよい。（積分区間はその都度確かめて）

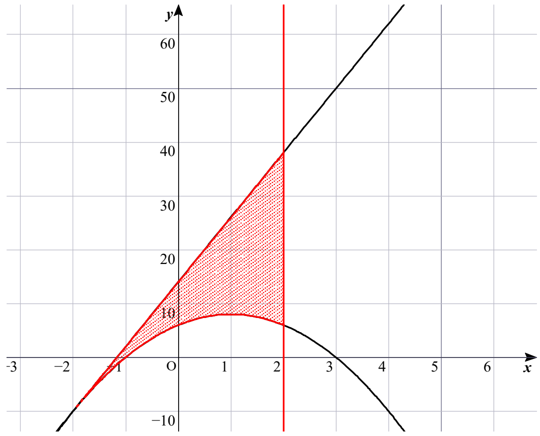
＜非記述式で解く＞

$$\frac{1}{3}(5-2)^3=\mathbf{9}$$

ちなみに，a が負でも使える。

＜例 2＞

$C: y=-2x^2+4x+6$ の x＝－2 における接線 l を引く。x＝2 と，C，l で囲まれる部分の面積を求めよ。



＜普通に解く＞

$y'=-4x+4$より，x＝－2 を代入して，$y'=12$

接線の方程式は，$y'=12(x+2)-10=12x+14$

求める面積は，

$$\int_{-2}^2 \{(12x+14)-\left(-2x^2+4x+6\right)\}dx$$

$$=\int_{-2}^2 \{2x^2+8x+8\}dx=2\int_{-2}^2 (x+2)^2\,dx$$

$$=2\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^2=\mathbf{\frac{128}{3}}$$

最後の式の形が，$\frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3$ となっていますね。aが負の場合は，a を絶対値としてください。

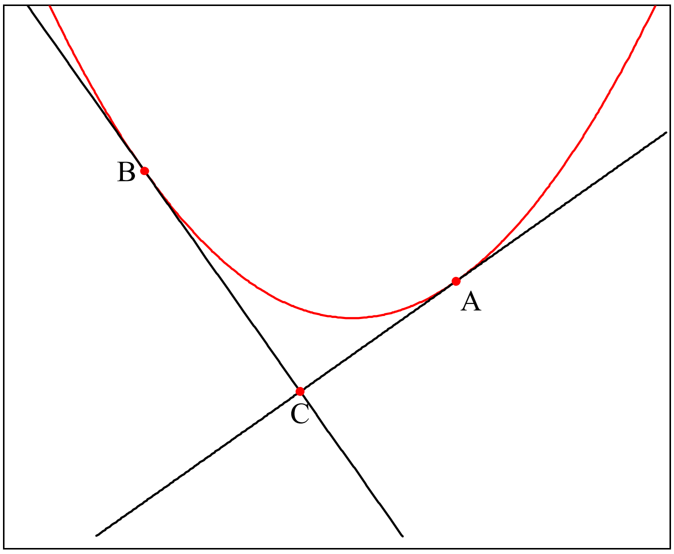
＜演習問題＞　※普通に解いてもよい

(1) $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ とその上の点$(3,2)$における接線とy軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

【解答】(1)$\frac{9}{2}$

第3回：1/12公式

①，放物線における，2つの接線の交点のx座標は，2つの接点の平均



＜証明せよ＞

放物線を平行移動して，$y=ax^2$の場合に限定しても一般性を失わない。

【証明例】

$A(p, ap^2)$ $B(q, aq^2)$における接線の方程式は，

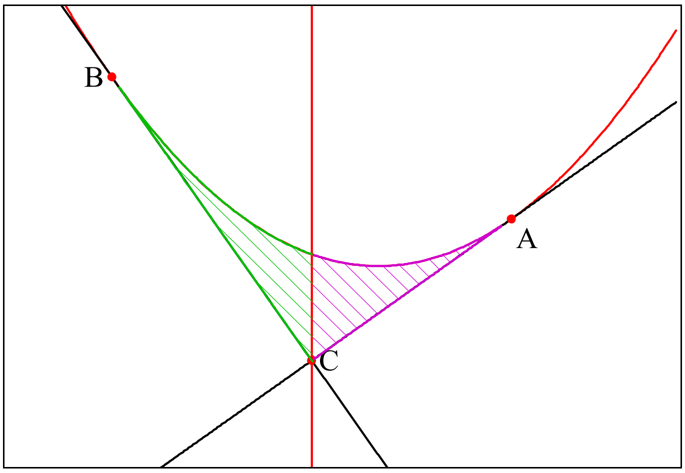
$y = 2apx - ap^2$，　$y = 2aqx - aq^2$

交点の x 座標は，

$2a(p-q)x = a(p^2 - q^2)$　$a \neq 0$，$p \neq q$だから，

$2x = p + q$　$x = \dfrac{p+q}{2}$ となる。

②，左右の面積等しい



要は，緑と紫の部分の面積が等しくなる。

＜証明例＞

放物線を平行移動して，$y = ax^2$の場合に限定しても一般性を失わない。

$A(p, ap^2)$ $B(q, aq^2)$における接線の方程式は，

$y = 2apx - ap^2$，　$y = 2aqx - aq^2$

2 直線の交点のx座標は$\dfrac{p+q}{2}$となるから，

求める面積は，

$$左側 = \int_{\frac{p+q}{2}}^{p} (ax^2 - 2apx - ap^2)dx$$

$$= a\int_{\frac{p+q}{2}}^{p} (x^2 - 2px - p^2)dx = a\int_{\frac{p+q}{2}}^{p} (x-p)^2 dx$$

$$= \frac{a}{3}[(x-p)^3]_{\frac{p+q}{2}}^{p} = -\frac{a}{3}\left(\frac{(q-p)^3}{2}\right) = \frac{a}{24}(p-q)^3$$

$$右側 = \int_{q}^{\frac{p+q}{2}} (ax^2 - 2aqx - aq^2)dx$$

$$= a\int_{q}^{\frac{p+q}{2}} (x-q)^2 dx = \frac{a}{24}(p-q)^3$$

これを利用すると，放物線と 2 接線で囲まれた部分の面積は，

$$\boldsymbol{\frac{a}{12}(p-q)^3}$$

になるというこれまた裏技が登場する。

＜演習問題＞

$y = \dfrac{1}{2}x^2$とその上の点$\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$，$(2,2)$における 2 本の接線で囲まれた面積を求めよ。

【解答】$\dfrac{9}{8}$

結局 1/3 公式を 2 回使っているだけなので，無理して覚えなくてよいと思う。

第4回：偶関数奇関数

関数$y = f(x)$が

奇関数（原点対称）なら，$\boldsymbol{f(x) = -f(-x)}$

例：$y = x$，$y = 2x^3$，$y = \sin x$

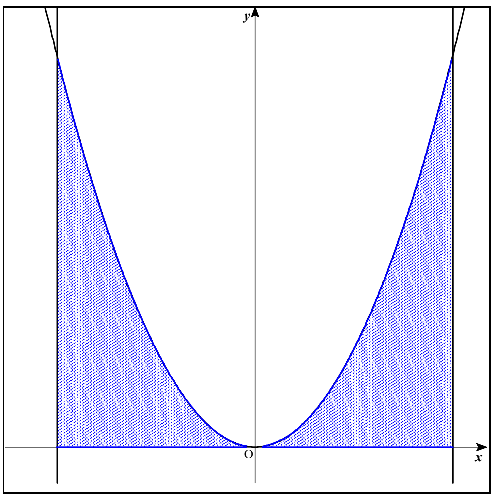
偶関数（y 軸対称）なら，$\boldsymbol{f(x) = f(-x)}$

例：$y = a$，$y = x^2$，$y = \cos x$

積分区間が y 軸対称なら積極的に使っていきたい。

＜例 1＞

$y = x^2$と，$x = \pm\alpha$，x 軸で囲まれた部分の面積

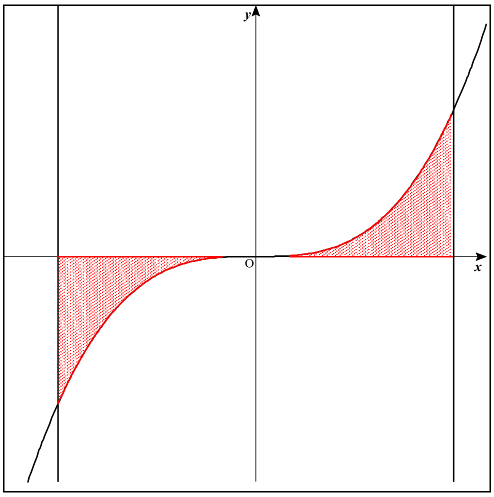


関数が y 軸対称なのだから，右側の面積と左側の面積が等しくなる。したがって，面積は，

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2\,dx = \mathbf{2}\int_0^{\alpha} x^2\,dx = \mathbf{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\alpha} = \frac{2}{3}\alpha^3$$

＜例 2＞

定積分 $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} 3x^3\,dx$



関数が原点対称なのだから，右側の面積と左側の面積で相殺される！

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} 3x^3\,dx = \mathbf{0}$$

※面積を求めるなら，絶対値付けるなり，2 倍するなり。
　絶対値の扱いに関しては 4STEP で頑張って！

　これじゃあごく限られた関数しか役に立たないではないか！と思ったでしょうが，積分の足し算引き算は認められている。

＜例 3＞

　次の定積分を計算せよ。

$$\int_{-1}^{1}(4x^3 - 3x^2 - 14x + 7)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 4x^3\,dx - \int_{-1}^{1} 3x^2 dx - \int_{-1}^{1} 14x\,dx + \int_{-1}^{1} 7dx$$

$$= 0 - 2\int_0^1 3x^2\,dx - 0 + 2\int_0^1 7dx$$

$$= -2[x^3]_0^1 + 2[7x]_0^1 = \mathbf{12}$$

　このように，奇関数を排除出来て，とっても気持ちがよい！

＜演習問題＞　次の定積分をせよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(5x^4 - 4x^3)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x^2 - x + \sin x)\,dx$

【解答】(1) 64　(2) $\dfrac{2\pi^3}{3}$