令和４年度　数学予想問題　解答・解説

大問 1　小問集合①　配点 29 点

出典：色々

問 1（3 点×3）

（1）$7-(-8)=7+8=\mathbf{15}$

（2）$(-2)^2\times 6-4^2=4\times 6-16=\mathbf{8}$

（3）$\sqrt{8}+\dfrac{6}{\sqrt{2}}$

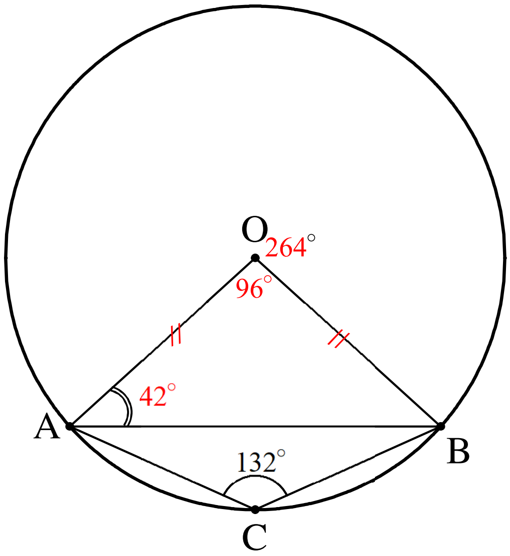
$$=2\sqrt{2}+\frac{6\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=\mathbf{5\sqrt{2}}$$

問 2（4 点）

$4x^2-36y^2=4(x^2-9y^2)=\mathbf{4(x+3y)(x-3y)}$

問 3（4 点）

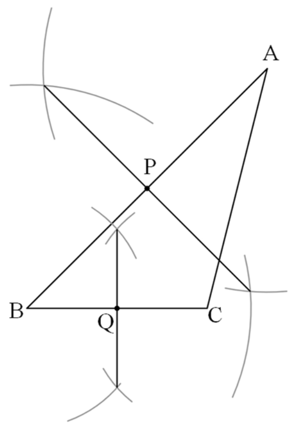
∠OAB＝42°



問 4（4 点）

$xy=-2$ より，$-4y=-2$　$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}}$

問 5（4 点）



中点連結定理の逆を用いる。PQ//AC，2PQ＝AC のとき，点 P，Q はそれぞれ AB，BC の中点。

よって，辺 AB，BC の垂直二等分線を作図して，点 P，Q と書けばよい。

問 6（4 点）

縦は 12 cm×5＝60 cm，横は 10 cm×6＝60 cm と，60 cm で縦横の長さが等しくなる。

必要な枚数は，5×6＝**30 枚**

作成：高校入試　数学　良問・難問

https://hokkaimath.jp/

大問 2　**何かと新傾向な問題　配点 16 点**

出典：オリジナル

問 1（1）（5 点）

1 組 b_1 人の合計点数は a_1b_1，2 組 b_2 人の合計点数は a_2b_2，3 組 b_3 人の合計点数は a_3b_3，となるので，
3 学級全員の点数の和は，$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
これを 3 学級の受験者数の和で割ればよいので，

$$\boldsymbol{\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{b_1+b_2+b_3}}$$

※いわゆる「加重平均」の問題である。

問 1（2）（4 点）

$b_1=b_2=b_3$の場合

（受験者数がどの学級も同じ場合）

※どの学級も受験者数が 1 人の場合　など，具体的数値を用いても可。

$b_1=b_2=b_3=k$とすると，

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{b_1+b_2+b_3}$$

$$=\frac{a_1k+a_2k+a_3k}{3k}$$

$$=\frac{k(a_1+a_2+a_3)}{3k}$$

$$=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$$

となり，雅紀さんの式でも平均点が正しく求められる。

問 2（完全回答 7 点）

（1）ウ（2）イ

ア：区間 5 の移動平均，イ：区間 5 の移動中央値，
ウ：区間 3 の移動平均，エ：区間 3 の移動中央値

まず，区間 5 の場合，1912 年と 2020 年に点はプロットされないので，アイ…区間 5　ウエ…区間 3 と見極める（またはより滑らかになっているアイを区間 5 と見極める）。

ウとエ：「移動中央値」は「外れ値の影響を小さくする」ことから，1922 年の値を見ると，エの方が影響が小さくなっている。よって，エが移動中央値，ウが移動平均。

アとイ：やはり 1922 年の値の影響が大きく，1923 年～，引っ張られて気温が低くなっているアが移動平均，イが移動中央値。などの見分け方がある。

$\boxed{\text{大問 3}}$　<u>関数　配点 20 点</u>

出典：オリジナル

問 1（4 点）

直線lの傾きは，$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \dfrac{3-2}{0-1} = -1$

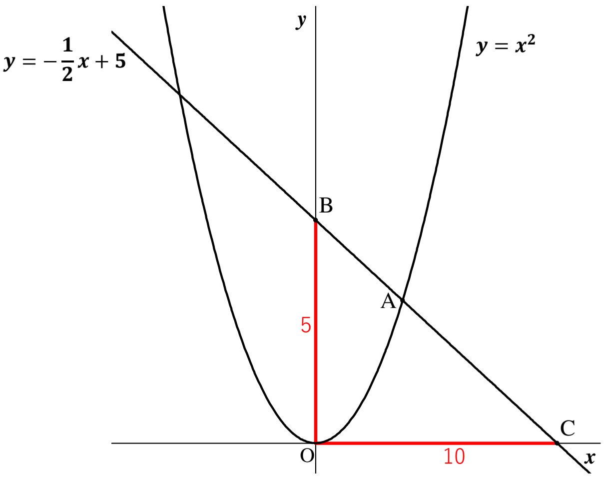
切片は，B(0, 3)より，3　　l：$\boldsymbol{y = -x + 3}$

問 2（4 点）

注意：原点を通らない！　x＝1 のとき y＝a,

x＝8 のとき，y＝64a　$\boldsymbol{a \leqq y \leqq 64a}$

問 3（7 点）



直線 l の傾きが$-\dfrac{1}{2}$ であることから，

$\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}$ なので，点 B の y 座標を t とすると，点 C の x 座標は $2t$ となる。

△OBC＝$\dfrac{1}{2}\times 2t \times t = t^2 = 25$　$t>0$ より，$t=5$

直線lの式は$y = -\dfrac{1}{2}x + 5$ となるから，

点 A の座標は，連立方程式

$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 5 \\ y = x^2 \end{cases}$　を解いて，

$-\dfrac{1}{2}x + 5 = x^2$　$2x^2 + x - 10 = 0$　$x = 2, -\dfrac{5}{2}$

$x > 0$ より，$x = 2$

y 座標は，y＝2^2＝4　　**A（2, 4）**

部分点：

・「OB/OC＝1/2」or「点 B の y 座標：点 C の x 座標＝1：2」【2 点】

・点 B の y 座標 or 点 C の x 座標【2 点】

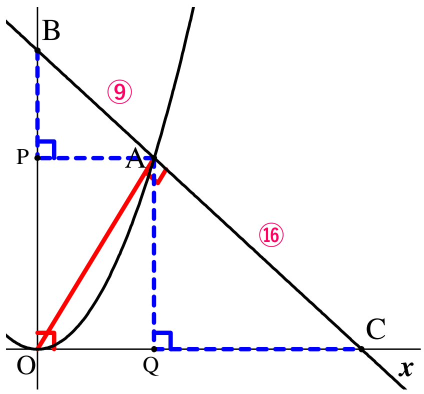
・点 A の x 座標【2 点】　・点 A の y 座標【1 点】

※

$y = -\dfrac{1}{2}x + b$と置いて，B(0, b)，C のx座標は$y = 0$ とし，x＝$2b$ とするのが普通かも。これで部分点 2 点。

問 4（5 点）

＜解法 1＞



△OAB∽△CAO，相似比 OB：CO＝3：4 より，面積比は 9：16 となる。

△OAB と△CAO で，それぞれ BA，CA を底辺とすると，高さは OA で共通だから，BA：CA＝9：16 となる。（上図で，△BPA∽△AQC より）

A のx座標は $4 \times \dfrac{9}{25} = \dfrac{36}{25}$,

A のy座標は $3 \times \dfrac{16}{25} = \dfrac{48}{25}$　$y = ax^2$に代入して，

$\dfrac{48}{25} = \dfrac{36^2}{25^2}a$　　$a = \dfrac{48}{25} \times \dfrac{25^2}{36^2} = \boldsymbol{\dfrac{25}{27}}$

作成：高校入試　数学　良問・難問

https://hokkaimath.jp/

＜解法 2＞

直線 OA の傾き×直線 BC の傾き＝－1 だから，

OA の傾きは，$\frac{4}{3}$ となる。

$y=\frac{4}{3}x$ と $y=-\frac{3}{4}x+3$ を連立した方程式を解いて

$\frac{4}{3}x=-\frac{3}{4}x+3$　$16x=-9x+36$

$25x=36$　$x=\frac{36}{25}$　$y=\frac{4}{3}\times\frac{36}{25}=\frac{48}{25}$

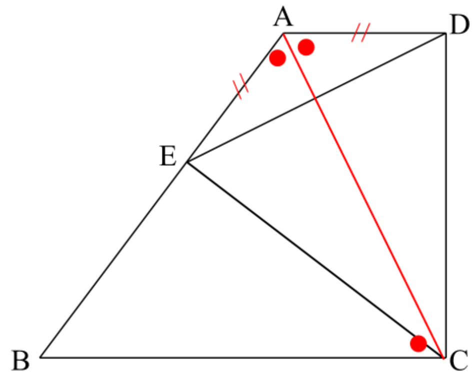
$y=ax^2$ に代入して，

$a=\frac{48}{25}\times\frac{25^2}{36^2}=\mathbf{\frac{25}{27}}$

$\boxed{大問 4}$　証明・図形　配点 **16** 点

出典：オリジナル

問 1（7 点）



△ACD と△ACE において，

仮定より，AD＝AE…①【1 点】

AD//BC より平行線の錯角は等しいから

∠ACB＝∠CAD

二等辺三角形の底角は等しいので，

∠ACB＝∠CAE

よって，∠CAD＝∠CAE…②【2 点】

共通な辺だから，AC＝AC…③【1 点】

①，②，③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，△ACD≡△ACE【1 点】

したがって，CD＝CE【2 点】

問 2（1）（4 点）

四角形 ADCF は長方形となるから，FC＝2 cm，BF＝3 cm となる。△ABF で，三平方の定理より，AF＝$\sqrt{25-9}=$ **4 cm**

作成：高校入試　数学　良問・難問

https://hokkaimath.jp/

問 2（2）（5 点）

点 E から線分 AF に垂線を下ろし交点を G とする。

EG//BF より，平行線と線分の比から，

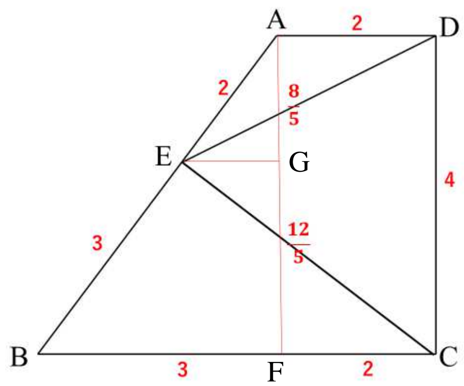
AE：EB＝AG：GF なので,

$AG = 4\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$ cm

台形 ABCD の面積は，$\frac{1}{2}\times(5+2)\times 4 = 14$ cm^2

△ ADE の面積は，$\frac{1}{2}\times 2\times\frac{8}{5}=\frac{8}{5}$ cm^2

したがって，四角形 BCDE = $14-\frac{8}{5}=\mathbf{\frac{62}{5}}$ **cm^2**



作成：高校入試　数学　良問・難問

https://hokkaimath.jp/

$\boxed{\text{大問 5}}$ **小問集合②　配点 19 点**

問 1（7 点）

出典：1981 年度山形県（正答率 1.0%）

頂点に対応している 3 つの数の和が偶数になるのは①「3 つの数が全て偶数」の場合と②「2 つの数が奇数で，もう 1 つの数が偶数」の場合である。 ①は，2-4-6 の 1 通りである。 ②は，2 つの奇数の選び方が， 1-3，1-5，1-7，3-5，3-7，5-7 の 6 通りで， 各々に対してもう 1 つの偶数の選び方が 3 通りあるから，6×3＝18 通りである。 したがって，全部で 1＋18＝**19 通り**

部分点：

・3 つの数の和が偶数になる①，②の場合が書けてある…1 点×2

・①の 1 通り　1 点　・②の 18 通り　2 点

樹形図等を用いて，総当たりで 19 通りと出すのもよいが，総当たりで誤っている場合は部分点を与えない。高校で場合の数，確率の問題を解く場合，答えが「何千通り」なんて当たり前なので，①～の場合，②～の場合と場合分けが中学生のうちからできると良い。

問 2（6 点）

出典：1981 年度広島県（正答率 25.0%）

切断前の円錐を考える。切断前の側面の扇形の中心角を x とすると，

母線 AB＝$\sqrt{6^2+8^2}=10$ cm，底面の円周の長さが 12 π cmなので

$20\pi\times\frac{x}{360}=12\pi$　　$\frac{x}{360}=\frac{12}{20}$

となるから，側面積は，

$100\pi\times\frac{12}{20}=60\pi$ cm^2

※πRrで 60π cm^2も可だが私はこの式嫌い。

おうぎ形 ABC は，この側面積を，90/360（1/4）倍したものなので，**15π cm^2**

問 3（6 点）

出典：2014 年度沖縄県（かなり改題）

3 段目までに全てで 9 個の正方形，4 段目までに全てで 16 個の正方形……n 段目までに全てで n^2 個（※1）の正方形がある。

$3k-1$（※2）段目までに全てで

$(3k-1)^2=9k^2-6k+1$ 個の正方形があるので，

$9k^2-6k+1=3(3k^2-2k)+1$（※3）であるから，

A は繰り返し$\mathbf{3k^2-2k+1}$回現れる。

（※1）真面目に考えるなら

n 段目までに正方形が全部で，1＋3＋5＋……＋$2n$－1 個ある。

高校生なら，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n(n+1)-n=n^2$

と計算する。

中学生は，上記解答のように察するか，調べるなどして何とかする。

または，日頃から平方数で遊んでいると，

0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
	1	3	5	7	9	11	13	15	17

と，隣り合う平方数の差が奇数になることを知っているはずなので（$n^2-(n-1)^2=2n-1$ より，全ての隣り合う平方数の差は必ず奇数になる），これを思い出して，1＋3＋5＋……＋$2n$－1＝n^2 とする。

ということで，ギリギリ中学範囲である。恐らく大半の中学生は解答例の説明通り n^2 を出したと思われる。

（※2）どうして 1 段目から $3k$－1 段目なのか。

「1 段目から n 段目の右端の正方形の記号を繰り返し数えると，A は何回現れますか答えなさい。」という問題だと，高校生の問題となる。

n が 3 の倍数だと右端の記号は C，それ以外は A であることから，場合分けが必要である。

> 1 段目から n 段目までに正方形が全てで，1＋3＋5＋……＋$2n$－1＝n^2 個ある。
>
> I）n＝$3k$－2（n＝1，4，7…）のとき，
>
> $(3k-2)^2=9k^2-12k+4=3(3k^2-4k+1)+1$
>
> であるから，A は $3k^2-4k+2$ 回現れる。
>
> II）n＝$3k$－1（n＝2，5，8…）のとき，
>
> $(3k-1)^2=9k^2-6k+1=3(3k^2-2k)+1$
>
> であるから，A は $3k^2-2k+1$ 回現れる。
>
> III）n＝$3k$（n＝3，6，9…）のとき，
>
> $(3k)^2=9k^2=3\times3k^2$ であるから，A は $3k^2$回現れる。

問題では，n＝$3k$－1 の場合のみを切り取って出題，これだと中学生にも出題できる。

（※3）どうして 3 でくくるのか

例えば，1 段目から 4 段目の右端まで 16 個の正方形があるとき，16＝3×5＋1（16÷3＝5 あまり 1）と表されるので，A が 6 回，B と C が 5 回現れることが分かる。それを一般化してるだけ。

（※4）

昔，https://hokkaimath.jp/blog-entry-89.html で，高校入試の規則性は，答えが $an+b$ または an^2 しか出ないと書いていたが，2019 年度道コン 5 回で https://hokkaimath.jp/blog-entry-106.html や，2018 年度埼玉県の問題で答えがan^2+bn+cとなるような問題が出されてしまった！

試しに自分で沖縄県の問題をいじってみると，中学生にも無理なく$3k^2-2k+1$ と答えさせる問題が出来てしまったので，気をつけましょう。型に当てはめるような勉強・指導は良くない。最終手段として，$an+b$，an^2 と仮定して方程式解いて答えだすのもありではあるが……（an^2+bn+c の場合でも 3 個式作れば連立方程式で何とかなる）。

（※5）

k＝1（2 段目）のとき 2 回，k＝2（5 段目）のとき 9 回，k＝3（8 段目）のとき 22 回なので，

$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=9 \\ 9a+3b+c=22 \end{cases}$　これをすごく頑張って解くと，

$a=3$，$b=-2$，$c=1$　となり，$3k^2-2k+1$と出せるっちゃ出せる。非記述式の最終手段。

作成：高校入試　数学　良問・難問

https://hokkaimath.jp/