

bとcの符号

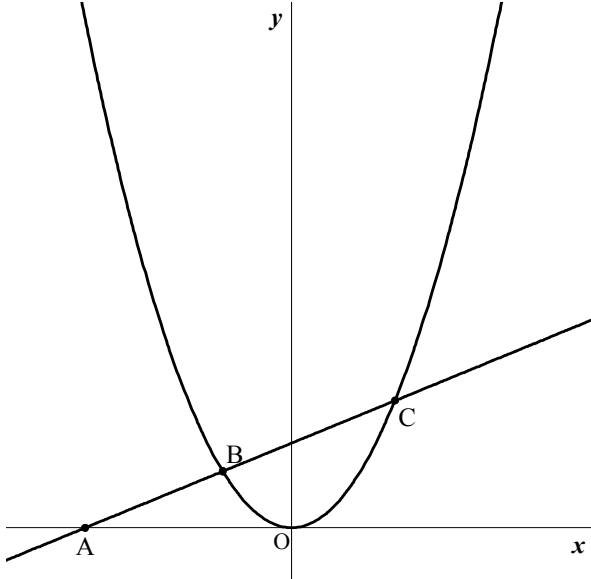
範囲：関数・回転体

難易度：★★★★★

得点 _____ /14

【出典：2009年度 ラ・サール高校】

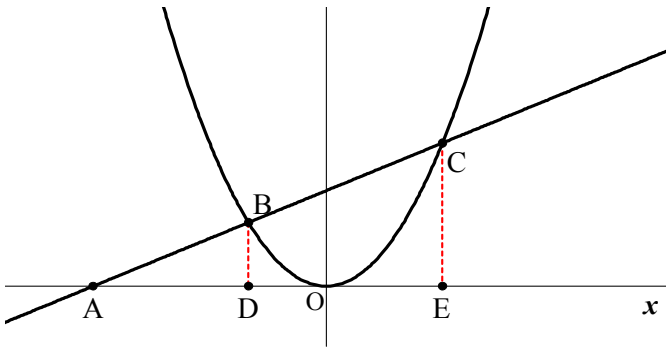
$y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフと点 A (-3, 0) を通る直線が、図のように 2 点 B, C で交わっている。このとき、 $\triangle OAB$ と $\triangle OBC$ の面積の比は 4 : 5 である。点 B, C の x 座標はそれぞれ b, c として、次の間に答えよ。



- (1) b, c の値をそれぞれ求めよ。
- (2) $\triangle OBC$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

【解答例】

(1) (5点×2)



$\triangle OAB : \triangle OBC = 4 : 5$ より、高さ共通だから、 $AB : BC = 4 : 5$ である。B, C から x 軸に垂線を下ろし、交点をそれぞれ D, E とする。

$AD : AE = BD : CE = 4 : 9$ より、

$$(3 + b) : (3 + c) = 4 : 9 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{3}b^2 : \frac{1}{3}c^2 = 4 : 9 \quad \text{すなわち} \quad \frac{b^2}{c^2} = \frac{4}{9} \quad \dots \textcircled{2}$$

②において、 $b < 0$, $c > 0$ であるから、

$$b = -\frac{2}{3}c \quad \textcircled{1} \text{に代入して、} \quad c = \frac{3}{2}, b = 1$$

(2) (4点)

$\triangle OBC = \triangle ACE - \triangle ADB - \triangle ODB - \triangle OEC$ である。それぞれ x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は、

$$\triangle ACE \text{ の体積} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} \pi \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{32} \pi$$

$$\triangle ADB \text{ の体積} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \pi \cdot 2 = \frac{2}{27} \pi$$

$$\triangle ODB \text{ の体積} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \pi \cdot 1 = \frac{1}{27} \pi$$

$$\triangle OEC \text{ の体積} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} \pi \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{32} \pi$$

$$\triangle \overset{OBC}{\cancel{ACE}} \text{ の体積} = \left(\frac{27}{32} - \frac{2}{27} - \frac{1}{27} - \frac{9}{32} \right) \pi = \frac{65}{144} \pi$$

【コメント】

例の感染症の影響で、一部都道府県では三平方の定理を出題しないそうです。その際に、代わりの問題となってくるのが、式変形がややこしい問題だと思われます。

ラサールの問題なので難しいですが、(1) は、 b と c の符号からあり得る値を絞らなくてはなりません。(絞らなくても無理やり解けますが)

(1) は面積比は当たり前前に知っていて、そこからどううまく計算するかが問われていますね。

(2) はサーベス問題.....かと思いきや、結構計算が面倒。三平方なくなったら、こういう計算がひたすら面倒な問題にも注意ですね。