

変域と文字式

範囲：中3関数

難易度：★★★★☆

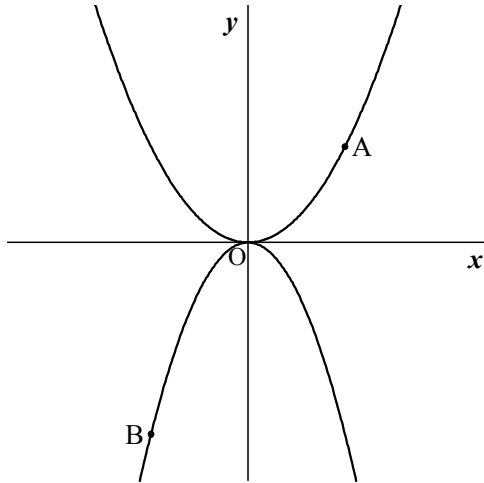
得点

/10

出典：オリジナル

下の図のように、関数 $y = \frac{1}{2}x^2 \cdots \textcircled{1}$ のグラフと、関数 $y = ax^2 \cdots \textcircled{2}$ ($a < 0$)のグラフがあります。 $\textcircled{1}$ 上に x 座標が 2 となる点 A, $\textcircled{2}$ 上に x 座標が負となる点 B をとります。点 O は原点とします。次の問いに答えなさい。

$\textcircled{1}$



$\textcircled{2}$

- 問1 点 B の y 座標を -14 とします。直線 AB の式が、 $y = 4x - 6$ となるとき、 a の値を求めなさい。
- 問2 $\textcircled{1}$ において、 x の変域が $b - 2 \leq x \leq b$ のとき、 y の変域が $2 \leq y \leq 8$ でした。考えられる b の値を全て求めなさい。
- 問3 $a = -1$ とします。 $\textcircled{2}$ 上に、点 B と y 座標が同じで、 x 座標が t (> 0) である点 C をとります。直線 OC が、 $\triangle ABC$ の面積を二等分するとき、 t の値を求めなさい。計算過程も書きなさい。

【解答例】

問 1 (3 点)

点 B の x 座標は、 $y = 4x - 6$ に $y = -14$ を代入して、 $x = -2$

B $(-2, -14)$ となるから、 $y = ax^2$ に代入して、 $a = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}$

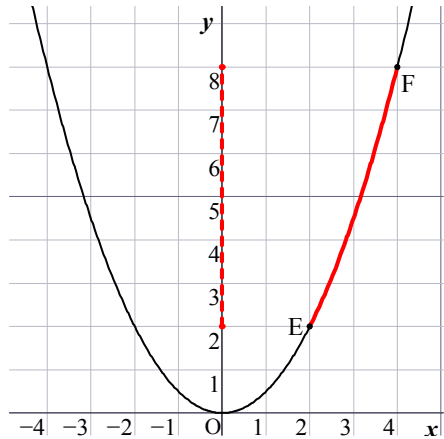
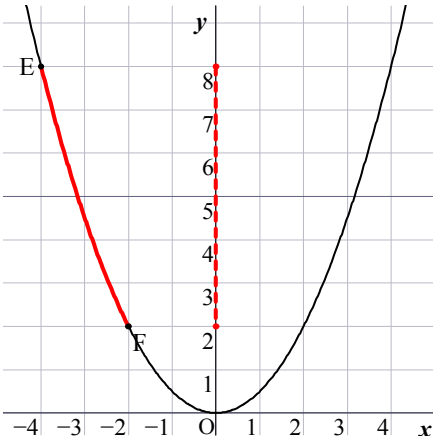
問 2 (3 点)

$y = \frac{1}{2}x^2$ において、最小値 2、最大値 8 となればよいから、

最小値 2 をとる x は $x = \pm 2$ 、最大値 8 をとる x は $x = \pm 4$

x の変域が $b - 2 \leq x \leq b$ であるから、考えられる変域は、

$-4 \leq x \leq -2$, $2 \leq x \leq 4$ $b = -2, 4$



【コメント】

関数の問題は作りやすいので (図が) 量産しています。問 1 は直線 AB と書くことによって「点 A 必要なのかな？」と受験生を惑わすことができます。問 2 は b の文字でやられる人多そうですが、図を書いて「 x の範囲は 2 だ、この範囲で最大値 8、最小値 2.....」と簡単に考えることができれば余裕。

問3 (4点)

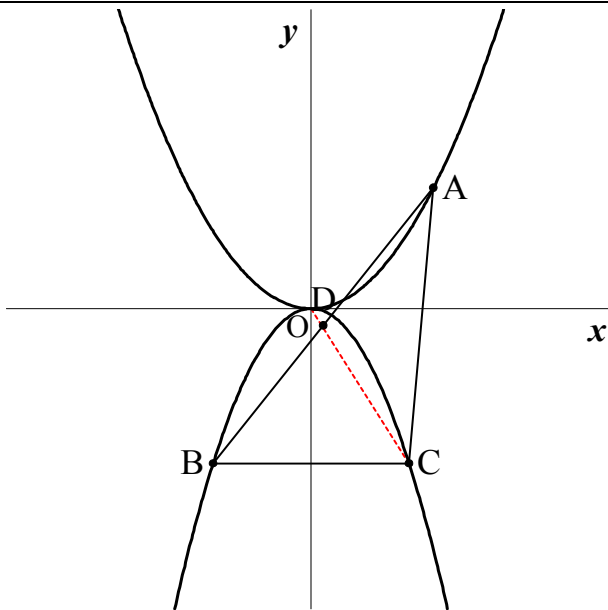
A (2, 2), B (-t, -t²), C (t, -t²) と表せる。直線 OC と直線 AB との交点を D とする。

点 D は AB の中点なので, $D\left(\frac{2-t}{2}, \frac{2-t^2}{2}\right)$

直線 OC は, 点 D を通るので, $OC : y = ax$ と置くと, C の座標を代入して,

$a = -t$ $y = -tx$ は, 点 D を通るので, $\frac{2-t^2}{2} = -\frac{t(2-t)}{2}$

$t^2 - t - 1 = 0$ $t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $t > 0$ なので, $t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$



【コメント】

最近関数の問題で2次方程式解かせるのが流行っているそうです。こちらの問題も文字だらけできついでしょーうね。高校入ったら文字で数学苦手になる人続出です。

【制作】

高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>