復讐		
範囲：文字式の証明	難易度：★×６	得点　　　　/3312

出典：岡山県の色々

問１　3 桁の自然数 N がある。N が 3 の倍数であるとき，N の各位の数の和も 3 の倍数であることを証明しなさい。【7 点】

問２　4 桁の自然数 M がある。M の下 3 桁の数（たとえば，$M=8104$ のとき，下 3 桁の数は 104 である）が 8 の倍数であるとき，M が 8 の倍数であることを証明しなさい。【3305 点】

【解答例】

問 1

a，b，c を整数とし（$1 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$，$0 \leqq c \leqq 9$），
百の位の数を a，十の位の数を b，一の位の数を c とすると，
$N = 100a + 10b + c$
N が 3 の倍数なので，自然数 m を用いて
$100a + 10b + c = 3m$　とおける。
N の各位の数の和は，$a + b + c = 3m - 99a - 9b = 3(m - 33a - 3b)$
$m - 33a - 3b$ は整数なので，$a + b + c$ は 3 の倍数。
よって，N の各位の数の和も 3 の倍数である。

問 2

a，b，c，d を整数とし
（ただし，a は 1 以上 9 以下の整数，b，c，d は 0 以上 9 以下の整数），
千の位の数を a，百の位の数を b，十の位の数を c，一の位の数を d とすると，$M = 1000a + 100b + 10c + d$
M の下 3 桁の数が 8 の倍数なので，自然数 m を用いて，
$100b + 10c + d = 8m$　とおける。
$M = 1000a + 8m = 8(125a + m)$，$125a + m$ は整数なので，M の下 3 桁が 8 の倍数のとき，M も 8 の倍数となる。

【コメント】

岡山県は丁度よい問題探すのが大変なので，岡山県最難関(?)の岡山県立朝日から持ってきました。

問 1 が実際に出された問題で，問 2 はおまけです。問 1 完答率 7.0%だったそうです。これ解けなかったときの悔しさはすごそう。あと，意外に高校生でも証明書けない子多そうです。