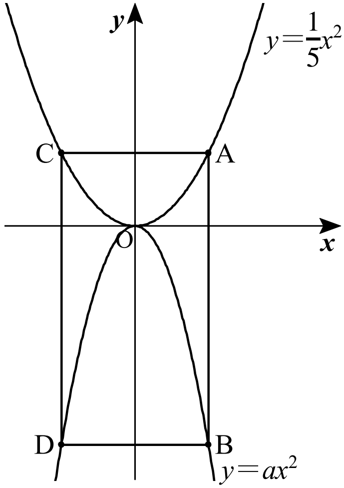
難問合同関数		
範囲：関数	難易度：★×6	得点　　　　　/15

出典：2022 年度千葉県

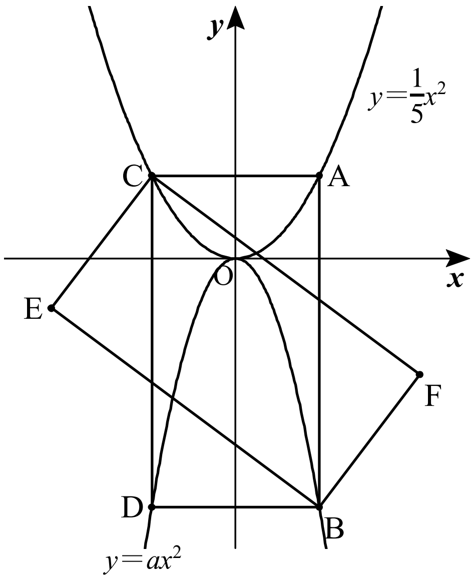


右の図のように，関数 $y=\frac{1}{5}x^2$ のグラフ上に点 A があり，点 A を通り，y 軸に平行な直線と関数 $y=ax^2$ のグラフとの交点を B とする。点 A の x 座標は 5 で，点 B の y 座標は－15 である。また，2 点 A，B と y 軸に関して対称な点をそれぞれ C，D とし，長方形 ACDB をつくる。このとき，次の（1）～（3）の問いに答えなさい。ただし，$a<0$ とする。

（1） a の値を求めなさい。

（2） 2 点 B，C を通る直線の式を求めなさい。

（3） 下の図のように，長方形 ACDB と合同な長方形 CEBF をかいた。このとき，2 点 E，F を通る直線の式を求めなさい。



【解答例】（5 点×3）

（1）

B の x 座標は A と同じ 5 になるので，B（5，－15）

$$a=\frac{-15}{25}=-\frac{3}{5}$$

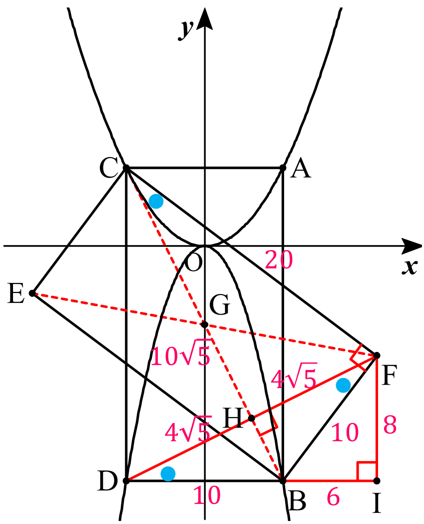
（2）

A（5, 5），点 A と点 C は y 軸に関して対称なので，C（－5, 5）

直線 BC は，傾き $\dfrac{20}{-10}=-2$，$y=-2x+b$に A の座標を代入して$b=-5$

$$y=-2x-5$$

（3）



長方形の対角線は，それぞれの中点で交わる，左図で点 G（0，－5），EF は点 G を通るから，y＝ax－5 と置ける。

△BCF において，BF＝10，CF＝20 だから，BC＝$10\sqrt{5}$

点 F から BC に垂線を下ろし交点を H とする。△BCF∽△BFH なので，

$$\mathrm{FH}=20\times\frac{10}{10\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$$

△BDF は BD＝BF の二等辺三角形で，BH⊥DF だから，DH＝FH＝$4\sqrt{5}$

△BCF∽△FDI なので，

$\mathrm{FI}=10\times\dfrac{8\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}=8$，$\mathrm{DI}=20\times\dfrac{8\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}=16$，よって $\mathrm{BI}=6$ となるから，

$\mathrm{F}(5+6,-15+8)$ すなわち，$\mathrm{F}(11,-7)$，$y=ax-5$ に代入し，

$a=-\dfrac{2}{11}$　$\mathbf{EF}：y=-\dfrac{2}{11}x-5$

【コメント】

配点が 5 点×3 なので，（1）（2）を素早く解いて，（3）は後回しが賢いでしょう。（3）補助線引きすぎました，もっと良い解法あるかも。久々に関数で，中学数学らしい超難問を解きました。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/