スクリーンと回転空間図形		
範囲：空間図形	難易度：★★★★★+	得点　　　　/20

出典：2021 年度　宮崎県

和恵さんの学校のプロジェクタは，電源を入れると，図 I のように，水平な床に対して垂直なスクリーンに，四角形の映像を映し出す。

プロジェクタの光源を P, 四角形の映像を長方形 ABCD とするとき，プロジェクタから出る光によってできる空間図形は，点 P を頂点とし，長方形 ABCD を底面とする四角錐になるものとする。

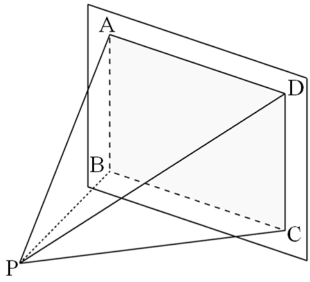


図 I

このとき，下の 1〜3 の問いに答えなさい。

ただし，PA＝PB＝PC＝PD＝13 m，AB＝6 m，AD＝8 m とする。また，直線 AB は水平な床に対して，スクリーンは平面であるものとする。

1　長方形 ABCD の対角線 AC の長さを求めなさい。

2　四角錐 PABCD の体積を求めなさい。

3　図 II のように，図 I のスクリーンを，直線 AB を回転の軸として矢印の向きに 45° 回転させたところ，スクリーンに映し出された長方形 ABCD の映像が，台形 ABEF に変わった。このとき，次の（1），（2）の問いに答えなさい。

（1）台形 ABEF の面積を求めなさい。

（2）四角錐 PABEF の体積を求めなさい。

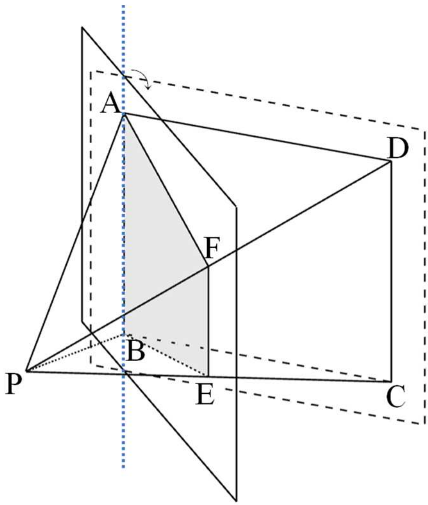


図 II

【解答例】

1（3 点）（正答率 80.5%）

$AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \mathbf{10\ m}$

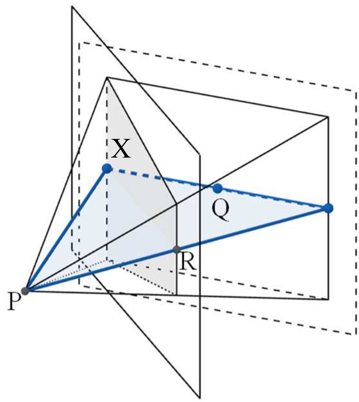
2（5 点）（正答率 39.2%）

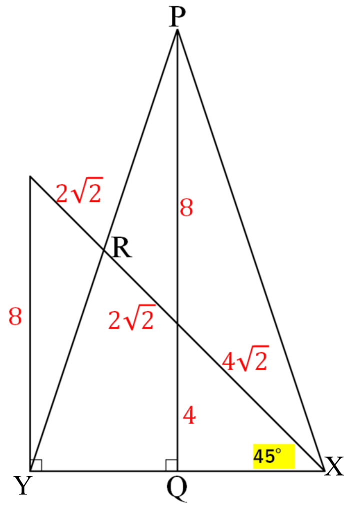
対角線 AC と BD との交点を Q とすると，四角錐の高さは，底面を長方形 ABCD としたとき，PQ となる。$PQ = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\ \mathrm{m}$

求める体積は，$\dfrac{1}{3} \times 48 \times 12 = \mathbf{192\ m^3}$

3（1）（6 点）（正答率 0.0%）

Point　スクリーンと垂直に交わる面で考える！





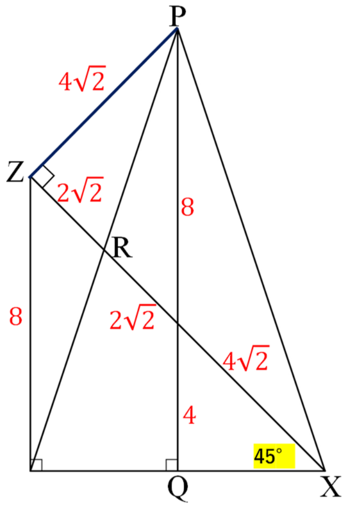
点 P と，AD，BC の中点を通る三角形を考えると，45°の条件が使いやすい。上図のように，∠RXQ＝45°となる直角二等辺三角形を描くと，合同な三角形ができ，PR＝RY である。よって，点 F，点 E はそれぞれ PD，PC の中点となるから，中点連結定理より，FE＝3 cm

AB，FE を上底，下底としたとき，高さは XR となるので（面 PYX と面 ABEF が垂直に交わっているから），$XR = 6\sqrt{2}$ m より，

台形 $\mathrm{ABEF} = \dfrac{1}{2} \times (6 + 3) \times 6\sqrt{2} = \mathbf{27\sqrt{2}\ m^2}$

3（2）（6 点）（正答率 0.4%）

四角錐 PABEF の体積は，点 P から直線 XR に垂線を下ろし交点を Z とすると，$\dfrac{1}{3}\times$台形 ABEF$\times$PZ　で求められる。



$\triangle PRX=\dfrac{1}{2}\triangle PXY=24\ m^2$ なので，

$$\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times PZ=24\quad PZ=4\sqrt{2}\ m$$

したがって，四角錐 PABEF の体積は，

$$\frac{1}{3}\times 27\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=\mathbf{72\ m^3}$$

【コメント】

問 1 は基本確認，問 2 は割としんどいかも。

問 3 は難問ですね。45°　をどう使うかが大変。補助線をどう引くかです。45°　なので，直角二等辺三角形を作図すると嬉しいかな？と考えられたら行ける……？

不思議なのが，（1）が正答率　0.0%なのに，（2）は正答率　0.4%と高い。（2），別の解法で解いたのか？

本番出たら，大半の人間にとっては捨て問題ですね。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/