立方体と正四面体		
範囲：空間図形	難易度：★★★☆☆	得点　　　　/8

出典：オリジナル

　下の図 1 のように, 1 辺が a cm の立方体 ABCD-EFGH があります。点 B, D，E，G を結び，正四面体 B-DEG を作ります。次の問いに答えなさい。

図 1

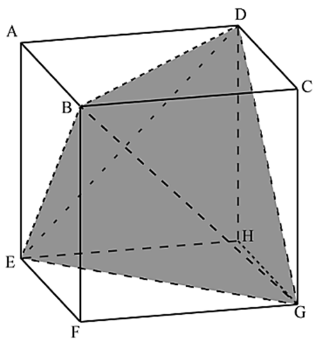
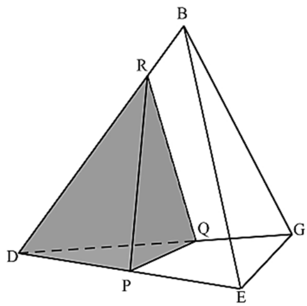


図 2



（1）1 辺 b cm の正四面体の体積が，$\dfrac{\sqrt{2}}{12}b^3$ cm^3 であることを，上の図を用いて，次のように説明しました。$\boxed{ア}$～$\boxed{ウ}$に入る a の式, $\boxed{エ}$に入る b の式を書きなさい。

　正四面体 B-DEG の体積は，立方体 ABCD-EFGH から，合同な 4 つの四面体の体積を引くことで求められる。a を用いて，立方体 ABCD-EFGH の体積は，$\boxed{ア}$cm^3 と表せ，四面体 A-BDE の体積は，$\boxed{イ}$cm^3 と表せる。

　したがって，正四面体 B-DEG の体積は，

$\boxed{ア}-4\times\boxed{イ}=\boxed{ウ}$cm^3 となる。

　ここで，正四面体 B-DEG の 1 辺の長さを b cm とすると，a は b を用いて，$a=\boxed{エ}$と表せる。これを，$\boxed{ウ}$に代入すると，1 辺が b cm の正四面体の体積は，$\dfrac{\sqrt{2}}{12}b^3$ cm^3 となる。

（2）図 2 は，正四面体 B-DEG を切り取ったものです。辺 DE，DR，DQ 上にそれぞれ DP：PE＝1：1，DQ：QG＝2：1，DR：RB＝3：1 となる点 P，Q，R を取ります。DE＝12 cm のとき，四面体 R-DPQ の体積を求めなさい。

【解答】

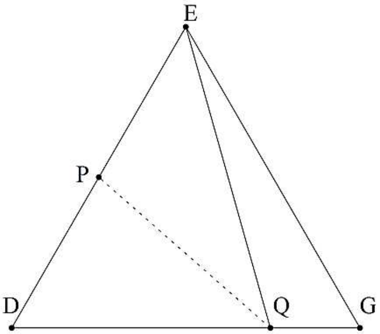
（1）（1 点×4）

ア … $\boldsymbol{a^3}$　イ … $\frac{1}{2} \times a^2 \times a \times \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{6}a^3}$

ウ … $a^3 - 4 \times \frac{1}{6}a^3 = \boldsymbol{\frac{1}{3}a^3}$　エ … $1:\sqrt{2} = a:b$ だから，$a = \frac{b}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}b}{2}}$

（2）（4 点）

正四面体 B-DEG と四面体 R-DPQ の底面積，高さの比が，体積の比となる。まず，△DEG と△DPQ の面積比を考える



△EDQ と△EQC で，同じ高さの三角形の面は，底辺の比に比例するから，

△EDQ：△EQG＝2：1

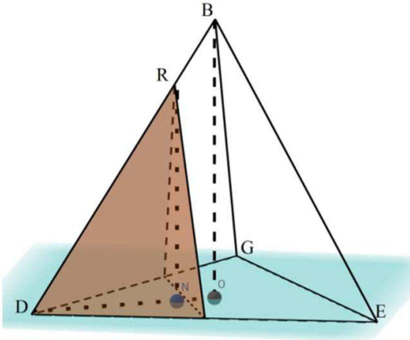
よって，△EDQ＝$\frac{2}{3}$△DEG

△EDQ で，同様に，△QPE：△QPD＝1：1 だから，△QPD＝$\frac{1}{2}$△EDQ，つまり，2△QPD＝△EDQ

したがって，代入し，2△QPD＝$\frac{2}{3}$△DEG　△QPD＝$\frac{1}{3}$△DEG となる…①

※まどろっこしく書いたが，ようは，**△DEG×$\frac{2}{3}$×$\frac{1}{2}$＝$\frac{1}{3}$△DEG＝△QPD** と考えてよい。

次に，高さの比を考える。



点 B，点 R から平面 DEG に垂線 BO，RN を下ろすと，これらが高さとなる。△BOD∽△RND だから，BO：RN＝BD：RD となるので，

RN＝$\frac{3}{4}$BO…②

これらをまとめると, 正四面体 B-DEG の底面積, 高さをそれぞれ 1 とし,

	底面積	高さ
正四面体 B-DEG	1	1
四面体 R-DPQ	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$

つまり,

$$\text{正四面体 B} - \text{DEG} = 1 \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\downarrow$$

$$\text{四面体 R} - \text{DPQ} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

四面体 R – DPQ の体積は,

正四面体 B – DEG の体積の$\frac{1}{4}$となる。

正四面体 $\mathrm{B-DEG}$ の体積は，(1)より

$\dfrac{\sqrt{2}}{12}b^3 = 144\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$であるから，

四面体 $\mathrm{R-DPQ}$ の体積は，$144\sqrt{2}\times\dfrac{1}{4} = \mathbf{36\sqrt{2}\ cm^3}$

※物凄く丁寧にやったが，ようは比の関係を使えるので，

四面体 $\mathrm{R-DPQ} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times}$ **正四面体B－DEG** $= \dfrac{1}{4}$正四面体 $\mathrm{B-DEG}$

とすればよい。

【コメント】

正四面体の体積，高校数学の知識を使わないと（重心とか）求められなさそうですが，一応中学数学の範囲内（何なら小学校の範囲）で求められることが出来ます。

一見補助線を引きたくなる問題ですが，ただ比率を用いるだけで，四面体の体積が求められます。

元は何かの教員採用試験の問題集でした。それを（かなり）アレンジしました。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/