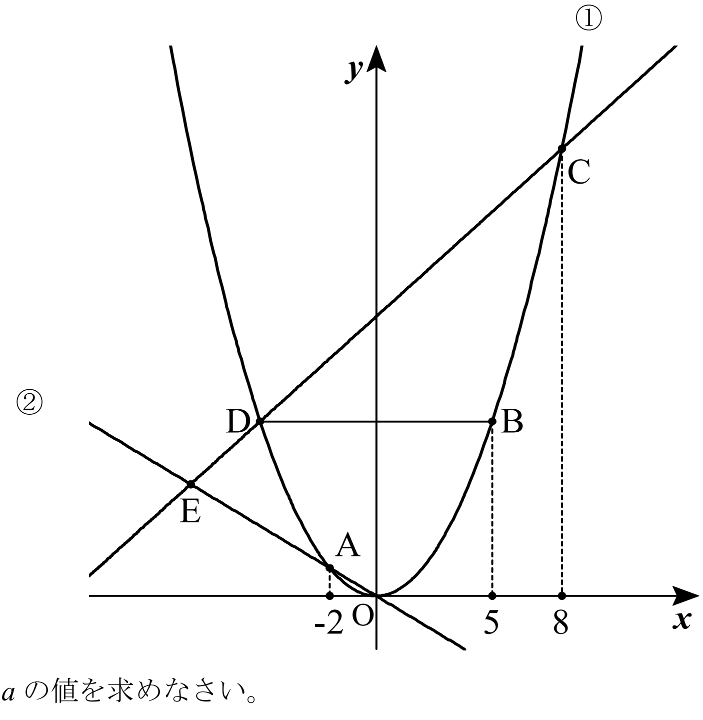
正統派関数		
範囲：中 3 関数	難易度：★★★★☆	得点　　　　　/10

出典：2018 年度熊本県　大問 5

下の図のように，２つの関数 $y=ax^2$（a は定数）……①，$y=-\frac{1}{2}x$……②のグラフがある。点 A は関数①，②のグラフの交点で，A の x 座標は-2である。３点 B，C，D は関数①のグラフ上にあり，B の x 座標は 5，C の x 座標は 8 であり，線分 BD は x 軸と平行である。また，点 E は関数②のグラフと直線 CD との交点である。このとき，次の各問いに答えなさい。



(1) a の値を求めなさい。

(2) 直線 CD の式を求めなさい。

(3) 線分 CD 上に２点 C, D とは異なる点 P をとる。△EAP の面積が△ABD の面積と等しくなるときの P の座標を求めなさい。

【解答解説】

（1）（3 点）

②に $x=-2$ を代入し，A（$-2, 1$）　これを，$y=ax^2$に代入し，

$$\boldsymbol{a=\frac{1}{4}}$$

（2）（3 点）

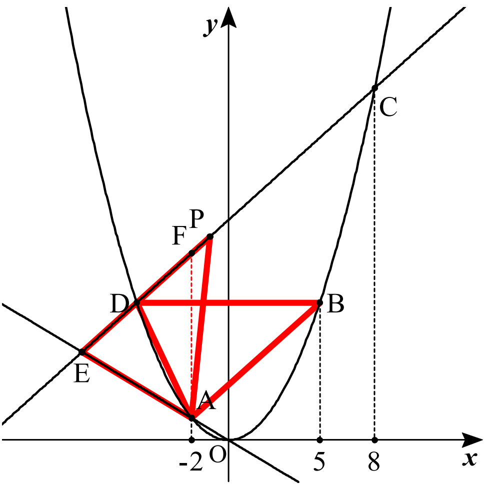
$y=\frac{1}{4}x^2$に，x座標を代入し，B$\left(5,\frac{25}{4}\right)$，C$(8,16)$　また，D$\left(-5,\frac{25}{4}\right)$

直線 CD は，傾きが，$\left(16-\frac{25}{4}\right)\div(3)=\frac{3}{4}$なので，$y-16=\frac{3}{4}(x-8)$

CD: $y=\frac{3}{4}x+10$

（3）（4 点）

（解答例 1　正統派）



E の座標は，直線 OE と直線 CD の式を連立した方程式を解いて，

E（$-8, 4$）

△ABD の面積は，

$$\frac{1}{2}\times10\times\left(\frac{25}{4}-1\right)=\frac{105}{4}$$

P の x 座標を t とする。

点 A から y 軸に平行な直線を引き，EC との交点を F とする。

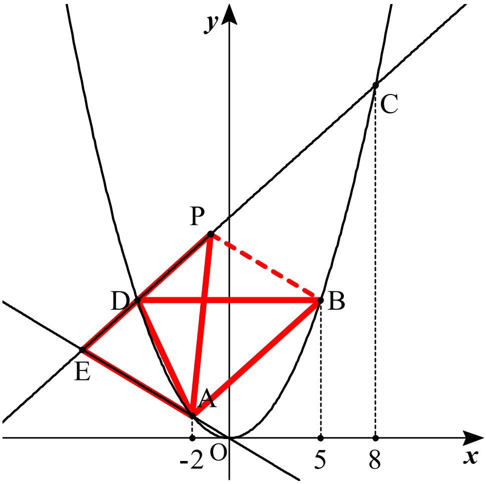
F$\left(-2,\frac{17}{2}\right)$となる。

△EAP＝△FAE＋△FAP

$=\frac{1}{2}\times\frac{15}{2}\times(6+2+t)=\frac{105}{4}$　この方程式を解いて，$t=-1$　**P$\left(-1,\frac{37}{4}\right)$**

（解答例 2　ダークホース）

直線 AB も傾きが，$\left(\frac{25}{4}-1\right)\div(7)=\frac{3}{4}$ なので，AB//DC である。



等積変形の考えから，

△ABD＝△EAP のとき，

△EAP＝△ABP であるから，

このとき，四角形 ABPE は平行四辺形となる。

よって，BP//AE なので，

B を通り傾き $-\frac{1}{2}$ の直線は，

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{35}{4}$$

この直線の式と，直線 CD の式を連立して，

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{35}{4} \\ y=\frac{3}{4}x+10 \end{cases} \quad x=-1,\, y=\frac{37}{4} \quad \mathbf{P\left(-1,\frac{37}{4}\right)}$$

【コメント】

　どちらが想定解答でしょうか？

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/