

斜めな立体と高さの位置

範囲：空間図形

難易度：★×6

得点

/24

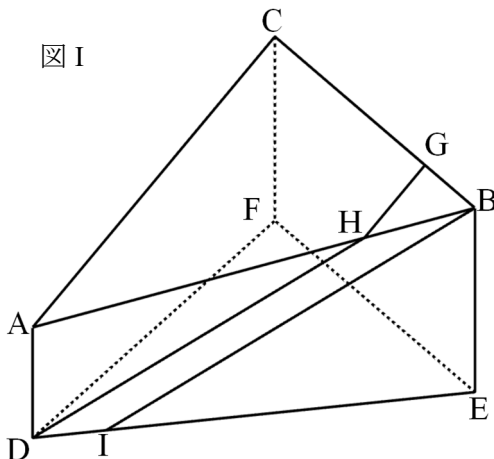
出典：2022 年度 大阪府 C

図 I, 図 II において, 立体 $ABC-DEF$ は五つの平面で囲まれてできた立体である。 $\triangle ABC$ は, $AB=AC$, $CB=8\text{ cm}$ の二等辺三角形である。 $\triangle DEF$ は, $DE=DF=10\text{ cm}$, $FE=8\text{ cm}$ の二等辺三角形である。四角形 $ADEB$ は $AD//BE$ の台形であり, $\angle ADE=\angle DEB=90^\circ$, $AD=3\text{ cm}$, $BE=5\text{ cm}$ である。四角形 $ADFC\equiv$ 四角形 $ADEB$ である。四角形 $CFEB$ は長方形である。

次の問いに答えなさい。

図 I

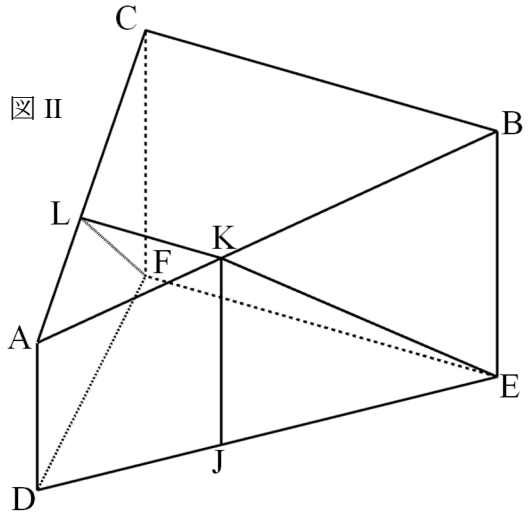
- (1) 図 I において, G は辺 CB 上の点であり, $CG=6\text{ cm}$ である。 H は, G を通り辺 AC に平行な直線と辺 AB との交点である。 H と D とを結ぶ。 I は, B を通り線分 DH に平行な直線と辺 DE との交点である。



- ① $\triangle DEF$ の面積を求めなさい。
- ② 線分 HB の長さを求めなさい。
- ③ 線分 DI の長さを求めなさい。

(2) 図 II において、J は辺 DE 上の点であり、 $DJ=4$ cm である。K は、J を通り辺 AD に平行な直線と辺 AB との交点である。K と E とを結ぶ。L は、K を通り辺 CB に平行な直線と辺 AC との交点である。L と F とを結ぶ。このとき、4 点 L, F, E, K は同じ平面上にある。

- ① 線分 LK の長さを求めなさい。
- ② 立体 $KEB-LFC$ の体積を求めなさい



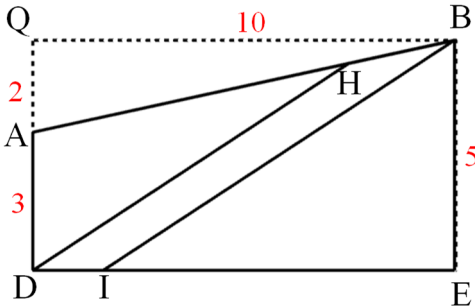
【解答例】

(1) ① (4点)

△DEF は二等辺三角形なので、辺 EF 上に $\angle DPE=90^\circ$ となる点 P をとる

と、 $DP = \sqrt{100 - 16} = 2\sqrt{21}$ cm, $\triangle DEF = \frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{21} = 8\sqrt{21}$ cm²

(1) ② (4点)



左図のように直線 DA 上に $AQ=2$ cm となる点 Q をとる。

$AB = \sqrt{100 + 4} = 2\sqrt{26}$ cm

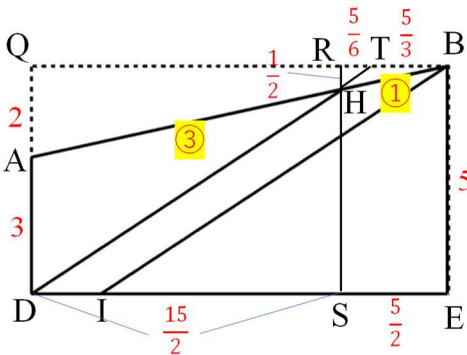
△ABC において、

$CG : GB = 6 : 2 = 3 : 1$, 平行線と線分の比の関係から、

$AH : HB = 3 : 1$

$HB = \frac{1}{4} \times 2\sqrt{26} = \frac{\sqrt{26}}{2}$ cm

(1) ③ (6点)



点 H から BE に平行な直線を引き、BQ との交点を R、DE との交点を S とする。また、直線 DH と BQ との交点を T とする。四角形 DIBT は平行四辺形となるから、 $DI = BT$

△BAQ において、 $AH : HB = 3 : 1$

より、 $RH = \frac{1}{2}$, $QR = \frac{15}{2}$, $RB = \frac{5}{2}$

△TDQ において、 $QD : RH = 5 : \frac{1}{2} = 10 : 1$ より、 $RT = \frac{15}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{5}{6}$

よって、 $DI = TB = \frac{5}{2} - \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$ cm

(2) ① (4点)

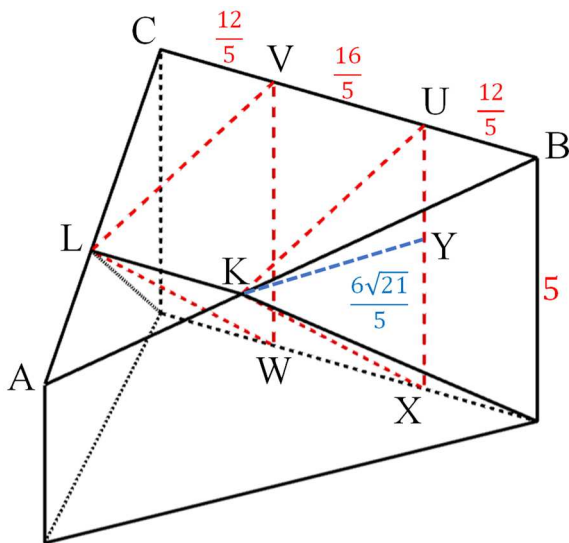
DJ : LE = 4 : 6 = 2 : 3 なので, AK : KB = 2 : 3, $LK = \frac{2}{5}BC = \frac{16}{5}$ cm

(2) ② (6点)

K, L から BC に垂線を下ろし交点をそれぞれ U, V とし, V, U から FE に垂線を下ろし交点をそれぞれ W, X とする。

また, K から UX に垂線を下ろし交点を Y とすると, **KY//DP** なので,

$$KY = \frac{3}{5} \times 2\sqrt{21} = \frac{6\sqrt{21}}{5} \text{ cm} \quad \text{※DP は(1)①で引いた線}$$



立体 KEB-LFC は左図のように3つの立体に分けられる。

四角錐 K-BUXE と四角錐 L-CVWF の体積は,

$$\frac{1}{3} \times \frac{12}{5} \times 5 \times \frac{6\sqrt{21}}{5} = \frac{24\sqrt{21}}{5}$$

三角柱 KUX-LVW の体積は,

$$\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{6\sqrt{21}}{5} \times \frac{16}{5} = \frac{48\sqrt{21}}{5}$$

よって, 立体 KEB-LFC の体積は, $2 \times \frac{24\sqrt{21}}{5} + \frac{48\sqrt{21}}{5} = \frac{96\sqrt{21}}{5}$ cm³

【コメント】

相変わらず難しい空間図形です。(1) は結局平面図形です。(2) は青文字の KY に気づけるかどうかです。DP//KY なのですが, 納得がいけない方は, Geogebra の <https://www.geogebra.org/3d/dkjrdenw> でも見てみてください。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>