容赦ない難問計算小問集合

範囲：計算	難易度：★★★★★++	得点　　　　　/35

出典：2019 年度　昭和学院秀英高校（高校入試）後期

次の問いに答えよ。

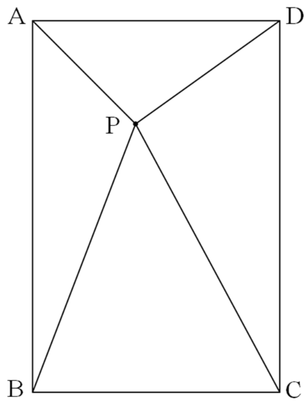
(1) $\sqrt{61^2-60^2+25^2-24^2-2\times11\times7}$ を計算せよ。

(2) 次の連立方程式を解け。ただし，$x \leqq y$ とする。

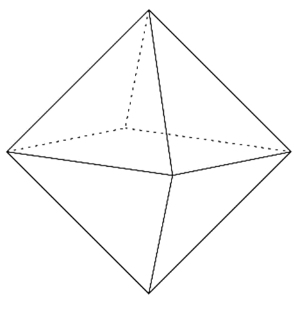
$$\begin{cases}(x+y)^2-xy=4\cdots ① \\ x+y+xy=2\cdots ②\end{cases}$$

(3) $\sqrt{n+25}$ と $\sqrt{6n}$ がともに自然数となるような最小の自然数 n の値を求めよ。

(4) 長方形 ABCD の内部に点 P がある。PA＝4，PC＝10，PD＝6 のとき，PB を求めよ。



(5) 表面積が $36\sqrt{3}$ であるような正八面体の体積を求めよ。



【解答例】

(1)（7 点）（基本）

$$\sqrt{61^2-60^2+25^2-24^2-2\times11\times7}$$
$$=\sqrt{(61+60)(61-60)+(25+24)(25-24)-2\times11\times7}$$
$$=\sqrt{121+49-154}$$
$$=\sqrt{16}=\mathbf{4}$$

(2)（7 点）（難）

$x+y=A$，$xy=B$と置くと，

$$\begin{cases}A^2-B=4\cdots①'\\A+B=2\cdots②'\end{cases}$$

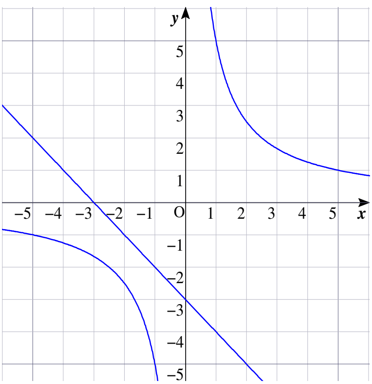
①’＋②’より，$A^2+A-6=0$　$(A-2)(A+3)=0$　$A=2,-3$

I）$A=2$ のとき，①’に代入して，$B=0$となる。

$x+y=2$,　$xy=0$　$x\leq y$より，$x=0,y=2$

II）$A=-3$ のとき，①’に代入して，$B=5$となる。

$x+y=-3$,　$xy=5$　この 2 つの式を同時に満たす x，y の組は存在しない。したがって，$\boldsymbol{x=0,y=2}$



（※）$x=-y-3$ を，$xy=5$ に代入し，

$(-y-3)y=5$　$y^2+3y+5=0$

中学範囲（実数の範囲）内では解けない。

左図のように，直線$x+y=-3$のグラフと，反比例$xy=5$のグラフを描くと，解を持たないことが視覚的にも分かる。

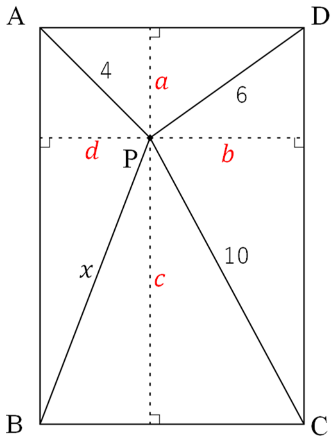
（3）（7 点）（やや難）

※基本的に「0 は自然数ではない」とする。この問題では 0 が自然数ではないことは暗黙の了解。

$\sqrt{6n}$ が自然数となるには，$n = 6k^2$ （k は自然数）であることが必要である。$\sqrt{n+25} = \sqrt{6k^2+25}$　k＝1 のとき 31，k＝2 のとき 49＝7^2

よって，最小の n は，k＝2 のとき，$\boldsymbol{n = 24}$

（4）（7 点）（知らないと解けない）



点 P から，左図のように長方形の各辺に垂線を下ろし，長さを a，b，c，d とする，また，PB＝x とする。すると，三平方の定理より，

$d^2 + a^2 = 16 \cdots$ ①

$a^2 + b^2 = 36 \cdots$ ②

$b^2 + c^2 = 100 \cdots$ ③

$c^2 + d^2 = x^2 \cdots$ ④

①＋②＋③＋④より，

$2(a^2+b^2+c^2+d^2) = 152 + x^2 \cdots$ ⑤

②，④を⑤に代入し，$2(36+x^2) = 152 + x^2$　整理して，$x^2 = 80$

$x > 0$ より，$x = 4\sqrt{5}$　$\mathbf{PB = 4\sqrt{5}}$

（5）（7 点）（アホなミス注意）

正八面体の表面積は「8×正三角形の面積」で求められるので，正三角形の 1 辺の長さを a とすると，

$$8 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 36\sqrt{3} \quad a = 3\sqrt{2}$$

正八面体は，2 つの正四角錐が重なったもの。正四角錐の高さは 3 だから，

正八面体の体積は，$\dfrac{1}{3} \times \left(3\sqrt{2}\right)^2 \times 3 \times 2 = \mathbf{36}$

【コメント】

中々クセ凄な小問集合たちです。（1）は簡単な工夫計算問題ですが。

（2）は，中学生にはかなり厳しい問題じゃないでしょうか。高校生でも解けなさそう。The 難関校。

（3）は，こういう問題では積の形している式から考えた方が良いです。$\sqrt{n+25}$ から考えてしまうと……いや，今回の問題の場合，$n=11$，24 と，すぐ 24 が思いつくか？　基本は積から。

（4）は知らないと解けないです。今回知られてラッキーでしたね。皆さん覚えておきましょう。有名らしい。

（5）は，落ち着いて計算する問題です。しかし，正八面体の高さを知らない等あったら大変です。正八面体の基本的な問題は，2019 年度沖縄県

https://hokkaimath.jp/blog-entry-148.html

や，2018 年度北海道（裁量問 3）

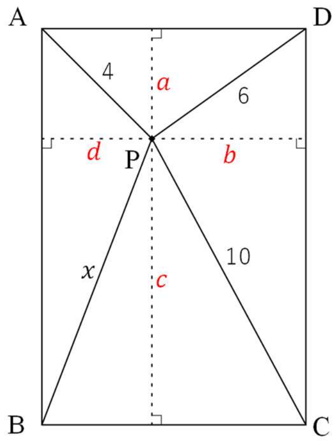
https://hokkaimath.jp/blog-entry-91.html

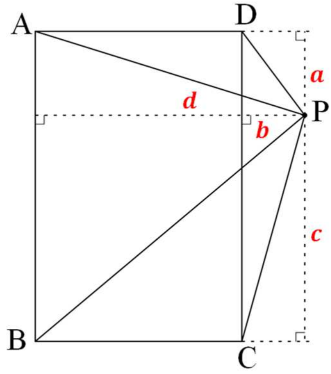
などを参照してください。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/

【追記】(4)





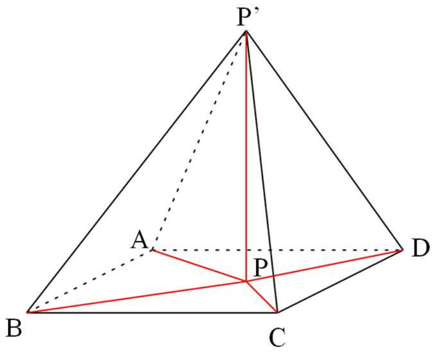
※a，b，c，d の名前の付け方おかしい（汚い）けど，我慢して。

長方形 ABCD と点 P に関して，点 P が内部にあろうが外部にあろうが，

$AP^2 = d^2 + a^2$，$BP^2 = c^2 + d^2$，$CP^2 = b^2 + c^2$，$DP^2 = a^2 + b^2$

すると，$AP^2 + CP^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$，$BP^2 + DP^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

であるから，$\boldsymbol{AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2}$　が成り立つ！



なお，点 P は長方形と同一平面上に無くても良い。左図のように，底面長方形の四角錐で考えると，

$AP'^2 = AP^2 + PP'^2$

$BP'^2 = BP^2 + PP'^2$

$CP'^2 = CP^2 + PP'^2$

$DP'^2 = DP^2 + PP'^2$

であるから，

$AP'^2 + CP'^2 = AP^2 + CP^2 + 2PP'^2$，$BP'^2 + DP'^2 = BP^2 + DP^2 + 2PP'^2$

であるので，$\boldsymbol{AP'^2 + CP'^2 = BP'^2 + DP'^2}$　と，点 P が同一平面上になくても成り立つ。

ともかくこれを“知っていれば”$BP^2 = 16 + 100 - 36 = 80$　$\boldsymbol{BP = 4\sqrt{5}}$

と，瞬殺。教えている塾の方が多い？