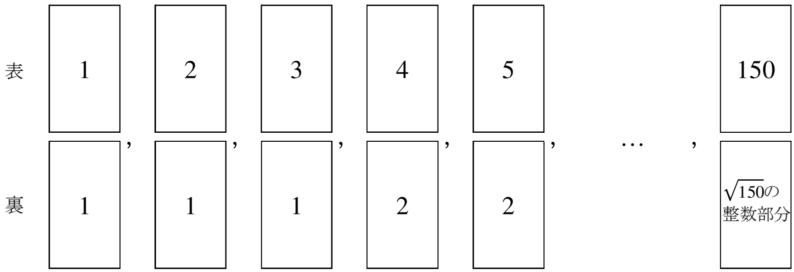
素因数		
範囲：整数問題	難易度：★★★★★	得点　　　　/19

出典：2021 年度　岐阜県

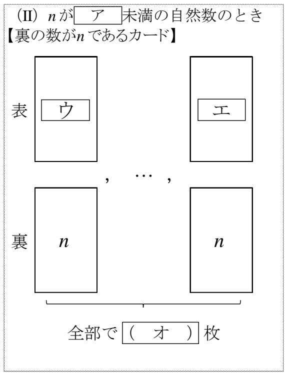
150 枚のカードがある。これらのカードは下の図のように，表には，1 から 150 までの自然数が 1 つずつ書かれており，裏には，表の数の，正の平方根の整数部分が書いてある。



次の（1）～（4）の問いに答えなさい。

（1）表の数が 10 であるカードの裏の数を求めなさい。

（2）次の文章は，裏の数が n であるカードの枚数について，花子さんが考えたことをまとめたものである。**ア**，**イ**には数を，**ウ**～**オ**には n を使った式を，それぞれ当てはまるように書きなさい。

> 表の数が 150 であるカードの裏の数は $\boxed{\text{ア}}$ であるので，裏の数 n は $\boxed{\text{ア}}$ 以下の自然数になる。
>
> (I) n が $\boxed{\text{ア}}$ のとき，裏の数が $\boxed{\text{ア}}$ であるカードは全部で $\boxed{\text{イ}}$ 枚ある。
>
> (II) n が $\boxed{\text{ア}}$ 未満の自然数のとき，裏の数が n である表の数のうち，最も小さい数は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，最も大きい数は $\boxed{\text{エ}}$ である。
>
> よって，裏の数が n であるカードは，全部で ($\boxed{\text{オ}}$) 枚ある。
>
> 
>

（3）裏の数が 9 であるカードは全部で何枚あるかを求めなさい。

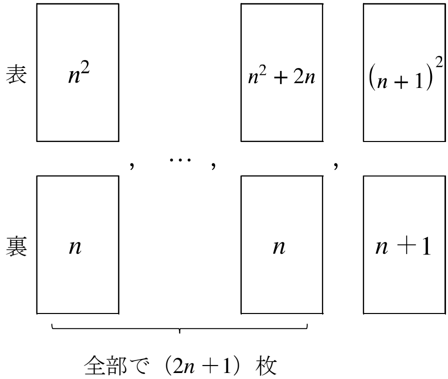
（4）150 枚のカードの裏の数を全てかけ合わせた数を P とする。P を 3^m で割った数が整数になるとき，m に当てはまる自然数のうちで最も大きい数を求めなさい。

【解答例】

(1)(2 点)(正答率 54%)

表の数が 10 なので，$\sqrt{10}$ の整数部分は，**3**

(2)(2 点×5)



ア）$144 < 150 < 169$　より，

$12 < \sqrt{150} < 13$　**12**

イ）144 から 150 の合計 **7** 枚（※1）

ウ）$\boldsymbol{n^2}$

エ）$(n+1)^2 - 1 = \boldsymbol{n^2 + 2n}$

オ）$(n^2 + 2n) - n^2 + 1 = \boldsymbol{2n + 1}$

表の数が 150 であるカードの裏の数は **12** であるので，裏の数 n は **12** 以下の自然数になる。

(I) n が **12** のとき，裏の数が **12** であるカードは全部で枚ある。

(II) n が 12 未満の自然数のとき，裏の数が n である表の数のうち，最も小さい数は $\boldsymbol{n^2}$ であり，最も大きい数は $\boldsymbol{n^2+2n}$ である。

よって，裏の数が n であるカードは，全部で（$\boldsymbol{2n+1}$）枚ある。

（正答率　ア 47%，イ 22%，ウ 26%，エ 16%，オ 16%）

(3)(2 点)(正答率 34%)

81 から 99 の合計 **19 枚**

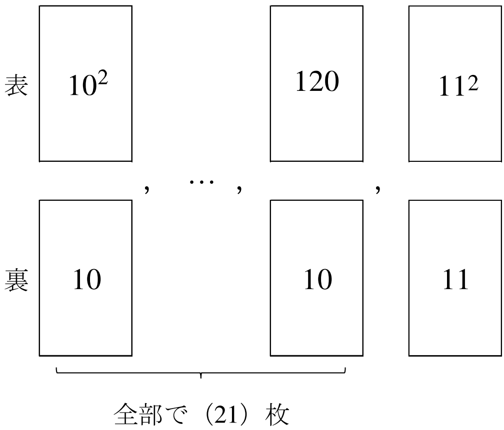
(4)(5 点)(正答率 1%)

(2) オより，裏の数が 1 であるカードは 3 枚，…，裏の数が 11 であるカードは 23 枚，そして，裏の数が 12 であるカードは 7 枚あるから，

$$P = 1^3 \times 2^5 \times 3^7 \times 4^9 \times 5^{11} \times 6^{13} \times 7^{15} \times 8^{17} \times 9^{19} \times 10^{21} \times 11^{23} \times 12^7$$

素因数 3 の個数は，7＋13＋19×2＋7＝65 個　**65**

【コメント】



中学生には非常に厳しい整数問題ですね。文字式だらけで嫌になります。

(1) からそもそも，問題文をしっかり読んで，表の数，裏の数がどちらなのかしっかり把握する必要があります。頭混乱しますね。

(2) と (3) は，順序逆にしてあげればよかったのに。(2) ウ～オは，中学生には非常に厳しい，文字式による思考が必須です。高校では嫌というほど出るのですがね。一般化で考えづらい場合は，具体的数値で考えると良いです。

(4) は, そもそも最後の問題であることから諦めた受験生多そうですね。P を 3^m という表記で中学生はアレルギー反応を起こします。でも，解答見ると理解は容易い。大したこと聞かれていないのが分かります。

似ているかもしれない問題：この問題の大問 5 問 3

https://hokkaimath.jp/blog-entry-267.html

【作成】　高校入試　数学　良問・難問 https://hokkaimath.jp/^