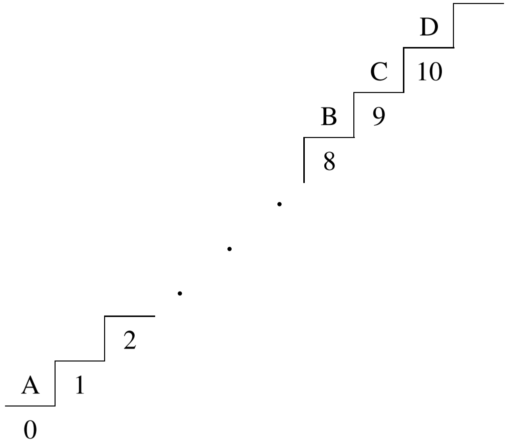
かなり解法を迷う確率		
範囲：確率	難易度：★×7	得点　　　/10

出典：2023 年度　関西学院高等部



　右図のような階段を，P 君は A を出発し, 次の３通りの方法を用いて D まで移動する。

①　１段ずつ上る。

②　１段とばしで上る。

③　２段とばしで上る。

③は連続で用いることはできず, ３通りの方法の中で用いないものがあっても構わない。このとき，１歩目に③を用いた上り方は何通りあるか。ただし，B の位置に来たときは③を用いることはできず，C の位置に来たときは必ず①を用いることとする。

（注意）採点の対象となるので途中経過も必ず書くこと

【解答例１】

１歩目に③を用いるので，残りは4～10の７段となる。
①を x 回，②を y 回，③を z 回用いるとすると，$x+2y+3z=7$
③は２回用いることができないので，$z=0$，1
以下，○○○の並べ方を○○○と表す。

（1）$z=0$ の場合，$x+2y=7$

(x, y) ＝（1, 3）（3, 2）（5, 1）（7, 0）

（1, 3）の場合，①②②②　４通り

（3, 2）の場合，①①①②②　10通り

※（①①①②②で６通り，②①①①②で４通り）

（5, 1）の場合，①①①①①②　６通り

（7, 0）の場合，①①①①①①①　１通り

（2）$z=1$ の場合，$x+2y=4$

(x, y) ＝（0, 2）（2, 1）（4, 0）

（0, 2）の場合，②②③　２通り

（2, 1）の場合，①①②③　６通り，②①①③　３通り　計９通り

（4, 0）の場合，①①①①③　４通り

（1），（2）より，合計 $4+10+6+1+2+9+4=$ **36通り**

【ありそうな質問】

Q1）①②②②　なぜ４通りとすぐ分かる？

A1）○○○○　の中で①の入り方は４通りである。①さえ決めれば，②は自動的に決まるので，すぐ４通りと分かる。

Q2）①①②②　なぜ６通り？

A2）１つめを①とすると，考えるのは，①○○○　残りの○の中で，①の入り方は３通りとすぐ分かる。同様に②○○○　も３通り。

または，$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=\dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=6$ 通りとしてももちろん良い。

Q3）①②③　なぜ６通り？　A3）樹形図描くか，$3!=6$ 通り

【解答例２】※コメントでいただいたもの

１歩目に③を用いるから，１段目，２段目に行く方法は０通り。
直前に③を用いて３段目に行く方法が１通り。
直前に③を用いずに３段目に行く方法が０通り。

以降，直前に③を用いて n 段目に行くには，
直前に③を用いずに$(n-3)$段目に行ってから③を用いるから，
パターン数は直前に③を用いずに$(n-3)$段目に行く方法と同じ。

直前に③を用いずに n 段目に行くには，
$(n-1)$段目に行ってから①を用いるか，
$(n-2)$段目に行ってから②を用いるかだから，
パターン数は$(n-1)$段目に行く方法と$(n-2)$段目に行く方法の和となる。

これを踏まえて表に表すと，

段数	１	２	３	４	５	６	７	８	９	１０
（直前に）③使う	０	０	１	０	０	０	１	２	３	５
③使わない	０	０	０	１	２	３	５	９	１７	３１

よって，上り方は $5+31=$**36(通り)**

【コメント】

解答例１で解きましたが「中学生らしくないなぁ」と思いました。高校の定期テストで出題されても正答率低いと思います。それとも有名な解法あるでしょうか，誰か教えてください。

「採点の対象となるので途中式」とありますが，果たしてちゃんと途中式書ける中学生，どのくらいいたのでしょう……。最後の問題ですし，諦めた方が良さそうです。

場合分けは面倒ですが，並べ方，階乗の良い練習とはなりますね。誘導付けたら公立高校でも出題できそう。