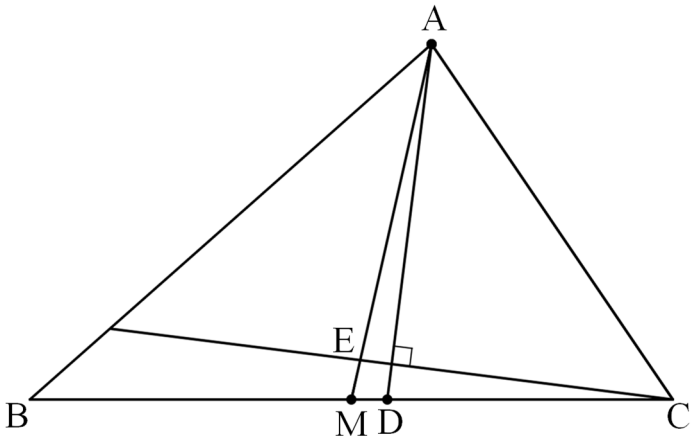
ベクトルの誘惑			
範囲：平面図形	難易度：★×5	得点	/15

出典：2014 年度　巣鴨高校

下図のような，AB＝5，BC＝6，CA＝4 である△ABC がある。辺 BC の中点を M，∠A の 2 等分線と辺 BC の交点を D とする。また，C から直線 AD に垂線を引き，この垂線と直線 AM の交点を E とするとき，次の各問いに答えよ。



(1) DM の長さを求めよ。

(2) ME：EA を求めよ。

(3) DE の長さを求めよ。

【解答例】

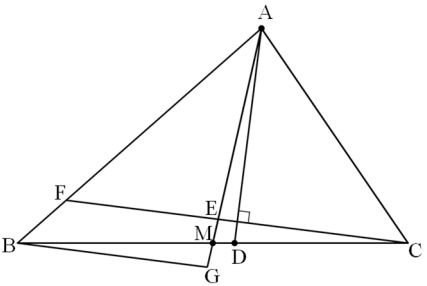
（1）（5 点）

AD は∠A の二等分線だから，

AB：AC＝BD：DC なので，

$\mathrm{BD}=\frac{10}{3}$，$\mathrm{CD}=\frac{8}{3}$

BM = 3 より，$\mathrm{DM}=\frac{10}{3}-3=\mathbf{\frac{1}{3}}$



（2）（5 点）

直線 CE と AB の交点を F とする。AD⊥CF, AD は∠A の二等分線なので，

△ACF は二等辺三角形となる。AF＝4，FB＝1

【解答例 1】普通の解法

点 B から FC に平行な直線を引き，直線 AM との交点を G とする。

AF：FB＝AE：EG＝4：1，△BGM≡△CEM より GM＝EM なので，

AE：EM：GM＝8：1：1，よって，**ME：EA＝1：8**

【解答例 2】メネラウスの定理

$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\times\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CM}}\times\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{EA}}=\frac{4}{1}\times\frac{6}{3}\times\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{EA}}=1$ なので，$\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{EA}}=\frac{1}{8}$，**ME：EA＝1：8**

【解答例 3】脳●でベクトル

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

tを実数とし，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\overrightarrow{\mathrm{AF}}+(1-t)\vec{c}=\frac{4}{5}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}k\vec{b}+\frac{1}{2}k\vec{c}$

$\vec{b}$，$\vec{c}$は一次独立なので，$\frac{1}{2}k=\frac{4}{5}t$，$\frac{1}{2}k=1-t$，これを解いて$k=\frac{8}{9}$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$となるから，ME：EA＝$\frac{1}{18}$：$\frac{8}{18}$＝**1：8**

(3)（5 点）

【解答例 1】普通の解法

(1)より MD：DC＝1：8，(2)より ME：EA＝1：8 なので，

$\triangle \mathrm{MDE} \backsim \triangle \mathrm{MCA}$，よって，$\mathrm{DE}=\frac{1}{9}\mathrm{CA}=\boldsymbol{\frac{4}{9}}$

【解答例 3】脳●でベクトル

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{5}{9}\vec{c}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=-\frac{1}{9}\vec{c}$，$\boldsymbol{\mathrm{DE}=\frac{4}{9}}$

【コメント】

公立高校入試では中々出づらい，ベクトルやメネラウスで露骨に有利になってしまう問題です。私立の平面図形あるあるです。私が作成する北海道公立高校入試の予想問題では絶対に出題しません。私立なので良いでしょう，メネラウス・チェバぐらい知っておきましょう。

巣鴨受験レベルなら，メネラウスの定理ぐらい知っているでしょうから，正攻法思いつかなくても（2）までは余裕ですね。（3）で差がつくのかな。

高校生以上はベクトルの誘惑に負けてしまいますね。

最近知ったのですが，巣鴨中学校・高校，最寄り駅は巣鴨駅じゃないのですね。びっくり！

【類題？ラサールの問題】

https://hokkaimath.jp/blog-entry-32.html

【作成】 高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/