垂心と空間図形		
範囲：色々	難易度：★×7	得点　　　　　/16

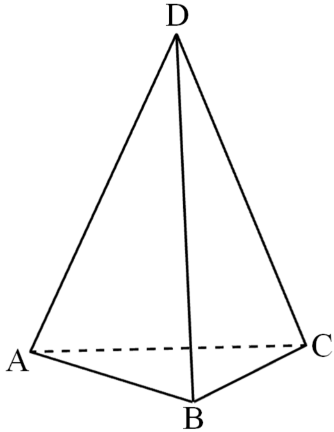
出典：2014 年度　灘高校

下図の四面体 ABCD において，AB＝BC＝CA＝2，AD＝BD＝CD，∠ADB＝45°である。辺 AB の中点を O とおき，O を中心とする半径 1 の球の内部(表面を含む)を F とする。

（1）△ABC の内部(周を含む)と F の共通部分の面積を求めよ。

（2）△ABD の内部(周を含む)と F の共通部分の面積を求めよ。

（3）△BCD の内部(周を含む)と F の共通部分の面積を求めよ。

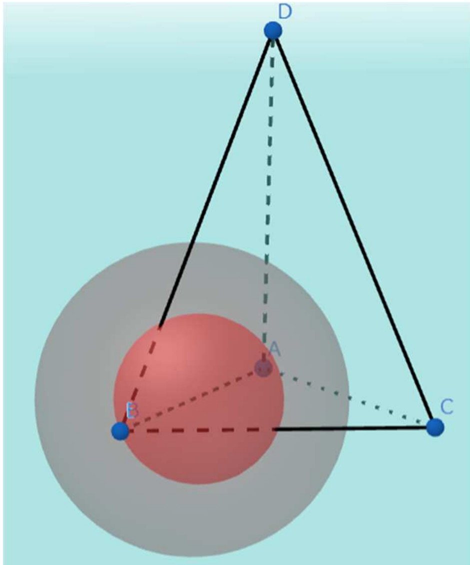


【ヒント】

・AD，BD，CD の長さは求める必要なし。

・（1）（2）意外にすんなり行く。有名角が出てくる。

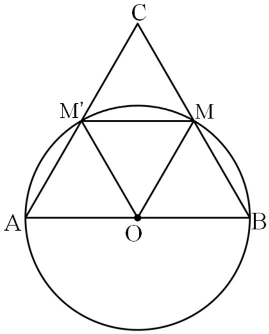
・（3）はタイトルと右図。



【解答例】

※記述式だが，言葉で説明するのは大変なので，簡単に図を描いておくと良い。

（1）（5 点）



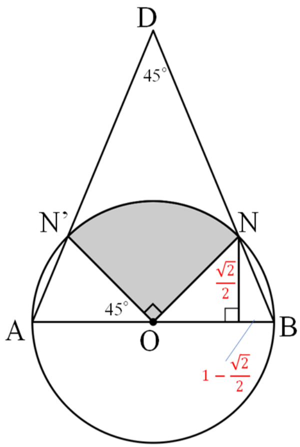
△ABC と球の共通部分は左図のようになる。

扇形 OMM′の面積は，$\pi\times1^2\times\dfrac{60}{360}=\dfrac{\pi}{6}$

$\triangle\,\mathrm{OAM}'+\triangle\,\mathrm{OBM}=2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

求める面積は，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

（2）（5 点）



△ABD と球の共通部分は左図のようになる。

∠DAB＝∠DBA＝67.5°　となるから，

∠N'OA＝∠NOB＝45°　，∠NON'＝90°　となる。

扇形$\mathrm{ONN}'=\dfrac{\pi}{4}$,

$\triangle\,\mathrm{ON}'\mathrm{A}+\triangle\,\mathrm{ONB}=2\times\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

求める面積は，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

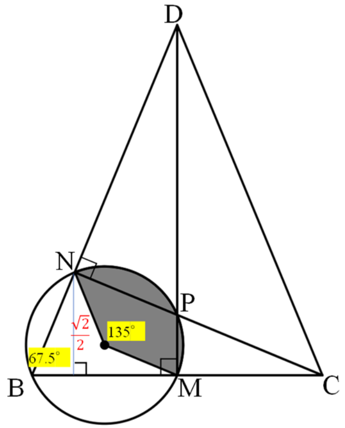
【コメント】

（1），（2）は解きましょう。（3）は……もっと良い解法無い？何か気持ち悪いよね。「BP が直径」これを思いつくか思いつかないかです，捨て問。時間内には無理。

GeoGebra で図を作っておきました。https://www.geogebra.org/3d/k3bfb5zd 空間図形は文明の利器を使いましょう。たぶんすんなり理解できます。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/

(3)（6 点）



（1），（2）より，△BCD 上の点 M，N は球の内部に含まれることが分かっているので，点 M，N を通り，△DBC に平行な円を考える。

（1）より点 M は BC の中点，（2）と△DAB≡△DBC であることより点 N は CN⊥BD となる点である。

よって，DM と CN の交点を P とすると，この円は **BP** を直径とする円となる。この円の中心を Q とする。(※ちなみに点 P は垂心)

この円の半径を r とすると，

扇形 QMN $=\pi r^2\times\frac{135}{360}=\frac{3}{8}\pi r^2$，　$\triangle$ QMN $=\frac{1}{2}\times r\times\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}r^2$

$\triangle$ BMN $=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ より，球と $\triangle$ DBC の共通部分の面積は，

$\frac{3}{8}\pi r^2+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}r^2$ で求められるので r^2 を求める。

(2)より，$\mathrm{BN}^2=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2-\sqrt{2}$

$\mathrm{BP}^2=4r^2$ より，$\mathrm{PM}^2=4r^2-1$，　$\triangle$ CBN ∽ $\triangle$ BPM より，

$4:\left(2-\sqrt{2}\right)=4r^2:\left(4r^2-1\right)$，　$r^2=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{3}{8}\pi r^2+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}r^2=\frac{3}{8}\pi\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\frac{6-3\sqrt{2}}{16}\pi+\frac{1}{4}}$$