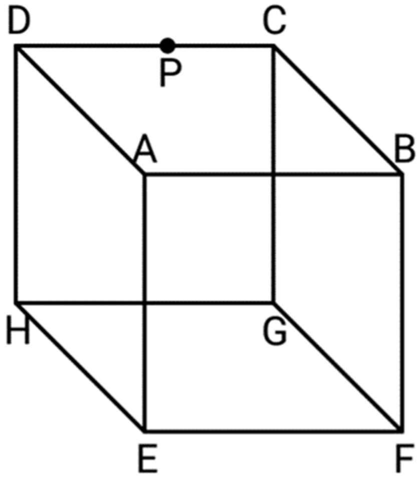
芸術的な高校入試第 29 回

出典：2018 年度　都立立川高校　大問 4	
難易度：★★★★☆☆	美しさ：★★★★★☆
総試験時間：50 分	配点：24 点/100 点

下の図のように, 1 辺の長さが 6 cm の立方体 ABCD-EFGH があります。点 P は，正方形 ABCD の辺上を動く点です。次の問いに答えなさい。



問 1　点 P が辺 AB 上にあり，AP : PB＝2 : 1 のとき，四角錐 P-EFGH の辺の中で，最も長い辺の長さは何 cm か。

問 2　点 P が辺 CD 上にあるとき，四角錐 P-EFGH の側面積が最も小さくなる場合の四角錐 P-EFGH の側面積は何 cm^2 か。ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

問 3　点 P が，正方形 ABCD の辺上を A→B→C→D→A と 1 周するとき，四角錐 P-EFGH が動いて出来る部分の体積を求めよ。

【解答例】

問 1（7 点）

P から EF に垂線 PQ を下ろす。PQ＝6 cm，HQ＝$\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$ cmより，HP $=\sqrt{36+52}=\sqrt{88}$
＝$\mathbf{2\sqrt{22}}$ **cm**

問 2（10 点）

△PEF＋△PFG＋△PGH＋△PHE の和が最も小さくなれば良い。

DC//EF, DC//HG より,（等積変形の考えから）△PEF と△PGH の面積は一定である。

P から EF に垂線を下ろすと，その長さは$6\sqrt{2}$ cmだから，

$$\triangle\mathrm{PEF}=\frac{1}{2}\times 6\times 6\sqrt{2}=18\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$$

$$\triangle\mathrm{PGH}=\frac{1}{2}\times 6\times 6=18\ \mathrm{cm}^2$$

△PFG と△PHE はそれぞれ PG，PH が高さとなるので，PG＋PH の長さが最小となればよい。このとき，P は線分 CD の中点にあればよいから（※）

$\mathrm{PG}=\mathrm{PH}=3\sqrt{5}$ cm

$$\triangle\mathrm{PFG}=\triangle\mathrm{PHE}=\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{5}=9\sqrt{5}\ \mathrm{cm}^2$$

よって求める側面積は,

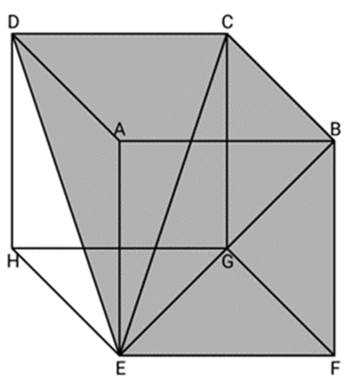
$18\sqrt{2}+18+2\times 9\sqrt{5}=\mathbf{18+18\sqrt{2}+18\sqrt{5}\ cm^2}$

問 3（7 点）

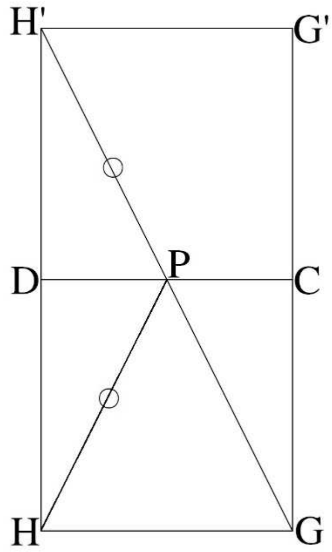
線分 EP のみを考えると，下の図のように，EP が通らない部分に出来る図形は, 正四角錐となる。他の FP，GP，HP でも同様と考えられる。

立方体から，正四角錐の交わる体積を引けばよい。正四角錐の交わる体積は，立方体の中心を R とすると，正四角錐 R-ABCD となる。したがって求める体積は,

$$216-\frac{1}{3}\times 36\times 3=216-36=\mathbf{180\ cm^3}$$



（※）展開図を描いて最短距離求める問題によくあるやつ



立川の模範解答にはこの図が添えてあったので，一言この図を添えて何か書いておくと better かもしれない。

【コメント】

元の問題は図が 2 個しっかり描かれていたのですが ~~（図を作るのが面倒くさいので）~~ プリントには 1 個です。元の問題も図がシンプルながら，結構考えさせられる問題です。問 2 は面倒なだけな気もしますが。

問 3 が非常に良い問題です。知識自体は，中 1 だけで解けます。（簡単ではありませんが）こういう問題が，今年度大幅に範囲削除された高校受験では狙われるでしょう。やっておくと良いかも？

【作成】

高校入試　数学　良問・難問

https://hokkaimath.jp/