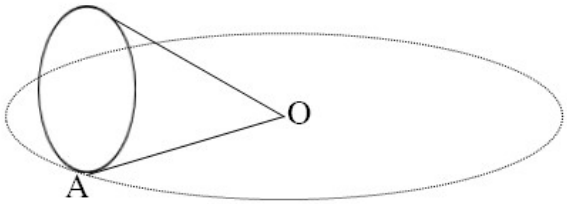
芸術的な高校入試第 30 回

出典：2019 年度　都立立川高校　大問 4	
難易度：★★★★★☆	美しさ：★★★★★★
総試験時間：50 分	配点：24 点/100 点

図 1 は，底面の半径が r cm，母線の長さが a cm の円すいを，頂点 O を中心として，側面が平面上をすべらないように出発地点 A から転がす様子を表している。次の各問に答えよ。

図 1



問 1　**図 1** において，出発地点 A から転がり始めた円すいが，頂点 O のまわりをちょうど m 周し，円すいがちょうど n 回転したところで,出発地点 A に止まった。ただし，m，n は自然数とする。これを満たす r と a の値の組を，次の①～⑤から全て選び，番号で答えよ。

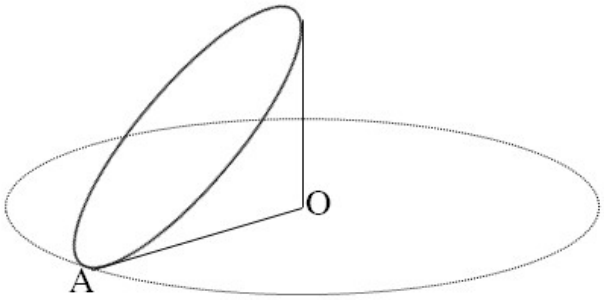
①，$r=3$，$a=8$　　②，$r=2.5$，$a=7.6$

③，$r=2$，$a=2\sqrt{5}$　　④，$r=\sqrt{2}$，$a=3\sqrt{2}$

⑤，$r=1$，$a=2\pi$

問 2　**図 2** は，**図 1** に おいて，$r=1$，$a=\sqrt{2}$の場合を表している。円すいが，頂点 0 のまわりをちょうど 1 周する間に，円すいの底面の円周が通過してできる曲面の面積は何 cm^2 か。

図 2



問 3　**図 3** に示した立体は,底面の半径が 1cm，母線の長さが 4 cm の円すい V と，底面の半径が 1 cm，母線の長さが 3 cm の円すい W の 2 つの円すいの底面をぴったり貼り合わせてできた立体である。

図 4 は，**図 3** に示した立体を，円すい V の頂点 O を中心として，円すい V の側面が平面上をすべらないように転がす様子を表している。この立体が，頂点 O のまわりをちょうど 1 周する間に，円すい W の頂点 P が描く曲線の長さは何 cm か。ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

図 3

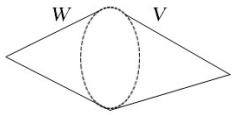
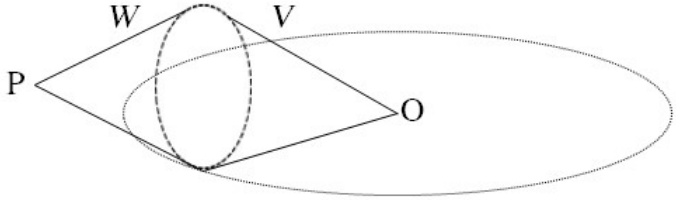


図 4



【解答例】

問 1（7 点）

円錐が m 周すると，頂点 O の周りを，

$$2\pi a \times m = 2\pi am$$

動き，n 回転すると，底面の円は

$$2\pi r \times n = 2\pi rn$$

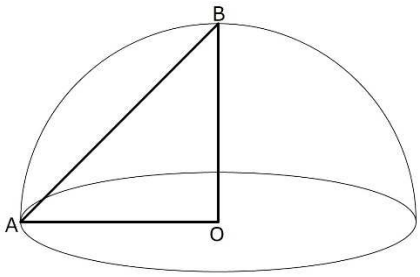
動く。

$2\pi am = 2\pi rn$　とすると，$\dfrac{a}{r} = \dfrac{m}{n}$　右辺は有理数。

よって，$\dfrac{a}{r}$ も，有理数となればよいので，**①，②，④**

問 2（7 点）

図のように，A を通る直径を引き，円との交点を B とする。AB＝2，OA＝OB＝$\sqrt{2}$なので，△OAB は∠O＝90°直角二等辺三角形である。したがって，△OAB を 1 回転させると，円錐となる。



しかし，今回は円周が動いてできる図形である。点 O から円周上までの長さは，どこも母線長さ＝$\sqrt{2}$ cm なので，円周が動いてできる立体は半球となる。
したがって，求める面積は，半球の側面積だから，

$$4\pi \times \left(\sqrt{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \mathbf{4\pi\ cm^2}$$

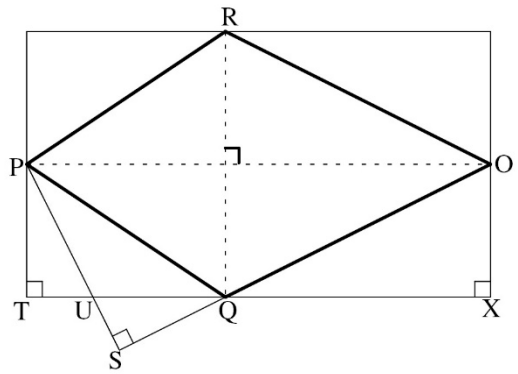
【コメント】

問 1 は図形問題の顔した数式問題（整数問題？），問 2 は発想と勘が試される非常に素晴らしい問題です。円すいがくるくるする問題はよく見ますが，まさか半球を考えさせるなんて思わないでしょう。こういう問題なら，範囲が大幅削除された入試でも使える良い問題ですね。1 度やっておいて損はない！？

問 3 は都立独自校でありがちな問題です。回答欄に図を描いて，少しでも部分点貰っておきましょう。数字が汚いので不安になりますね。

問 3（10 点）

円すいの底面上に，2 点 Q，R を QR が円の直径となるようにとる。O，P，Q，R を結んだ四角形を，以下のように長方形で囲む。



頂点 P が動く曲線は，上の図で，半径を OS とする円周となる。

QX＝$\sqrt{15}$ だから，△OQX∽△UPT より，

$$\mathrm{TU} = \frac{1}{\sqrt{15}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

すると QU の長さは，QT＝$2\sqrt{2}$なので，

$$\mathrm{QU} = 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{15}}$$

△OQX∽△UQS だから，

$$\mathrm{QS} = \sqrt{15}\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{15}}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{2\sqrt{30} - 1}{4}$$

よって，OS の長さは

$$\mathrm{OS} = 4 + \frac{2\sqrt{30} - 1}{4} = \frac{2\sqrt{30} + 15}{4}$$

求める曲線の長さは，

$$2\pi \times \frac{2\sqrt{30} + 15}{4} = \boldsymbol{\left(\sqrt{30} + \frac{15}{2}\right)\pi\ \mathrm{cm}}$$

とにかく，一つの大問で，円錐だけでようまあ色んな問い方が出来るなと感心します。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問

https://hokkaimath.jp/