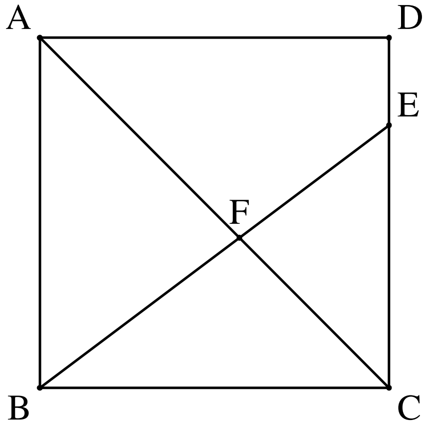
平面図形と座標設定 2		
範囲：中 3 図形	難易度：★★★★☆	得点　　　　　/12

出典：2019 年度　日本大学第一高校　過去問

1 辺の長さが 4 cm の正方形 ABCD がある。辺 CD を 3 : 1 に分ける点を E とし，AC と BE の交点を F とする。次の各問いに答えなさい。



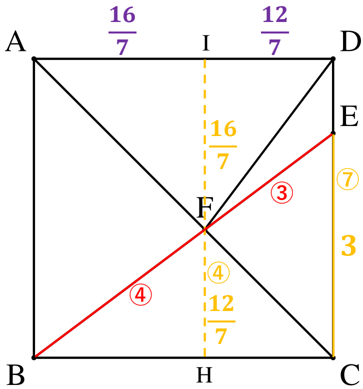
(1) △ADF の面積を求めなさい。

(2) 線分 FD の長さを求めなさい。

(3) 線分 AE と線分 FD の交点を G とするとき，線分 DG の長さを求めなさい。

恐らく無限に解法があります

【解答例 1】（たぶん）普通の解き方



(1)

点 F から BC，AD に垂線を下ろし，交点をそれぞれ H，I とする。BF : FE＝4 : 3 より，FH : EC＝4 : 7 となるから，

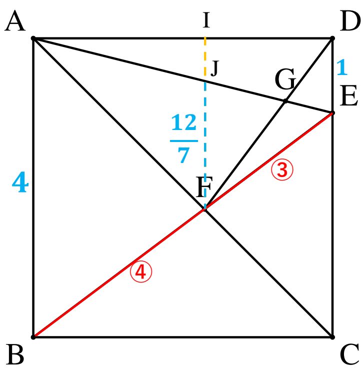
$$\mathrm{FH} = 3 \times \frac{4}{7} = \frac{12}{7} \quad \mathrm{FI} = 4 - \frac{12}{7} = \frac{16}{7}$$

$$\triangle \mathrm{ADF} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{16}{7} = \boldsymbol{\frac{32}{7}\ \mathrm{cm}^2}$$

(2)

△ AFI は直角二等辺三角形なので，$\mathrm{AI} = \frac{16}{7}$ より，$\mathrm{ID} = \frac{12}{7}$ となる。

△ FID で三平方の定理より，$\mathrm{FD} = \frac{1}{7}\sqrt{12^2 + 16^2} = \frac{4}{7}\sqrt{3^2 + 4^2} = \boldsymbol{\frac{20}{7}\ \mathrm{cm}}$



(3)

FI と AE との交点を J とする。

△EJF∽△EAB なので，

$$\mathrm{JF} = 4 \times \frac{3}{7} = \frac{12}{7}$$

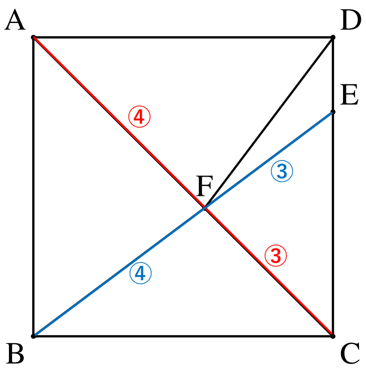
△GDE∽△GFJ なので，

GD ： GF＝7 ： 12

$$\mathrm{DG} = \frac{20}{7} \times \frac{7}{19} = \boldsymbol{\frac{20}{19}\ \mathrm{cm}}$$

【解答例 2】△ADF≡△ABF を利用する！（メールフォームで貰ったもの）

（1）（2）



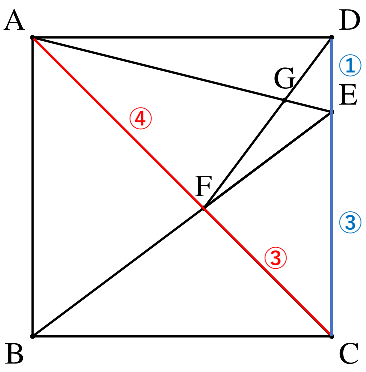
△ADF≡△ABF（AF 共通，AD＝AB，∠DAF＝∠BAF＝45°）なので，△ABF の面積を求めればよい。

△ABC＝8 cm^2 で，AF：FC＝4：3 だから，

$$\triangle\ \mathrm{ADF} = \triangle\ \mathrm{ABF} = \frac{4}{7}\triangle\ \mathrm{ABC} = \boldsymbol{\frac{32}{7}\ \mathrm{cm}^2}$$

また，△EBC は 3：4：5 の直角三角形なので，BE＝5 cm，$\mathrm{FD} = \mathrm{BF} = 5 \times \dfrac{4}{7} = \boldsymbol{\dfrac{20}{7}\ \mathrm{cm}}$

（3）



メネラウスの定理より，

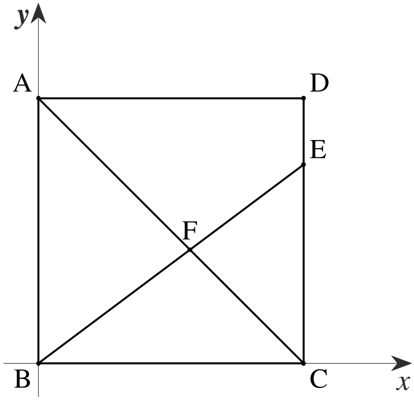
$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EC}} \times \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AF}} \times \frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{GD}} = 1$$

$\dfrac{1}{3} \times \dfrac{7}{4} \times \dfrac{\mathrm{FG}}{\mathrm{GD}} = 1$ だから，$\dfrac{\mathrm{FG}}{\mathrm{GD}} = \dfrac{12}{7}$

$$\mathrm{DG} = \frac{7}{19}\mathrm{FD} = \frac{7}{19} \times \frac{20}{7} = \boldsymbol{\frac{20}{19}\ \mathrm{cm}}$$

ものすごく計算が楽に！！

【解答例 3】 座標設定



左図のように，B(0, 0) A(0, 4) C(4, 0) D(4, 4) と座標設定する。

すると，E(4, 3)となり，F の座標は，直線の式を出して交点を求めるなどの方法を用いて，$F\left(\frac{16}{7}, \frac{12}{7}\right)$ と出せる。

(1)

$\triangle ADF = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(4 - \frac{12}{7}\right) = \boldsymbol{\frac{32}{7}}$ **cm²**

(2)

$$FD = \sqrt{\left(4 - \frac{16}{7}\right)^2 + \left(4 - \frac{12}{7}\right)^2} = \frac{1}{7}\sqrt{12^2 + 16^2} = \frac{4}{7}\sqrt{3^2 + 4^2} = \boldsymbol{\frac{20}{7}}\ \textbf{cm}$$

(3)

直線 FD：$y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$　直線 AE：$y = -\frac{1}{4}x + 4$　2 直線の交点は,

$G\left(\frac{64}{19}, \frac{60}{19}\right)$ となるから，$DG = \sqrt{\left(4 - \frac{64}{19}\right)^2 + \left(4 - \frac{60}{19}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{20}{19}}\ \textbf{cm}$

【コメント】

錦鯉，渡辺隆さんの出身高校らしいです。私立（と愛知県）でよく出されそうな平面図形の問題です。解答例 1 のように解くのが恐らく一般的ですが，正方形や長方形など都合の良い図形の場合，座標設定で力技で解くこともできます。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/