

何ですか，高校数学ですか

範囲：?????

難易度：★×?

得点

/12

出典：2020年度 慶應義塾志木高校

- (1) Tokyo2020 の 9 文字を 1 列に並べる。T, k, y がこの順に並ぶ並べ方は何通りあるか。
- (2) $18 \times 19 \times 20 \times 21 + 1 = m^2$ を満たす正の整数 m を求めよ。

【解答例】

(1) (6点) (他にも色々考えた方はあります)

(一般的な中学生には無理じゃない?)

Tokyo2020 の 9 文字の並べ方は $9!$ 通りだが, oo, 22, 00 はそれぞれ重複する。また, T, k, y の 3 文字の並べ方は $3!$ 通りだが, 今回は T, k, y の 1 通りのみを考えるので,

$$\frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!} = 9 \times 7 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \mathbf{7560 \text{通り}}$$

(2) (6点)

こんなブログを読む人間は, たまき (環耀) さんが行っている YouTube チャンネルも観ているはずである。

<https://youtu.be/9tfdG9fsD6I>

このような動画を観た経験があれば, たぶん容易に工夫ができる。

$18 = n$ と置くと,

$$18 \times 19 \times 20 \times 21 + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$$

$$n^2 + 3n = A \text{ と置くと, } A(A+2) + 1 = A^2 + 2A + 1 = (A+1)^2$$

A, m は自然数だから, $A+1 = m$ となる。

$$m = A+1 = n^2 + 3n + 1 = 18^2 + 3 \times 18 + 1 = \mathbf{379}$$

【コメント】

私立高校では高校数学の確率公式を覚えていることが前提の出題がされることが多々あるので (北海道では見たことないけど), これもそれ前提の問題でしょうね。共通テストや大学の二次試験で出題されても, 時と場合によっては結構正答率低そう。

(2) も数学オリンピックとかで出題されそうな問題ですね。初見だったら絶対に無理よね。昔何かの予想問題で誘導付きで出題しました。PC にデータ残っていました。

(問題)

$\sqrt{31 \times 30 \times 29 \times 28 + 1}$ を、根号をはずした形で表しなさい。

この問題を、次のように解くとき、 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{イ}}$ に入る式、 $\boxed{\text{ウ}}$ に入る自然数をそれぞれ書きなさい。

(解答)

そのまま計算するのは大変なので、 $31 \times 30 \times 29 \times 28$ が、連続した4つの自然数であることに注目して考える。

$n \geq 3$ とする。連続する4つの自然数のうち、2番目に大きい自然数を n とすると、連続する4つの自然数は、大きい方から順に、 $n+1$, n , $n-1$, $n-2$ と表せる。

連続する4つの自然数の積に1を足すと、

$$(n+1) \times n \times (n-1) \times (n-2) + 1 = (n+1)(n-2) \times n(n-1) + 1$$

次の式を展開すると、 $(n+1)(n-2) = \boxed{\text{ア}}$, $n(n-1) = \boxed{\text{イ}}$ となる。

ここで、 $\boxed{\text{イ}} = a$ と置くと、

$$(n+1)(n-2) \times n(n-1) + 1 = \boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{イ}} + 1$$

$$= (a-2) \times a + 1 = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 = (\boxed{\text{イ}} - 1)^2$$

n は自然数だから、 $\boxed{\text{イ}} - 1$ も自然数となる。したがって、連続する4つの自然数の積に1を足すと、ある整数の2乗となる。

このことを利用すると、今回の(問題)は、 $n=30$ とすれば良いので、

$$\sqrt{31 \times 30 \times 29 \times 28 + 1} = \boxed{\text{ウ}}$$
となる。

公立で出すならこれくらい誘導つけるかな、でもこれじゃ誰でも解けちゃうか笑 1989年 AIME (参考: Youtube タマキの数学)

ア : $n^2 - n - 2$ イ : $n^2 - n$

ウ :

$$\sqrt{(\boxed{\text{イ}} - 1)^2} = \sqrt{(n^2 - n - 1)^2} = \sqrt{(30^2 - 30 - 1)^2} = (30^2 - 30 - 1) = \mathbf{869}$$