

私立の難問計算問題

範囲：主に計算

難易度：★★★★★+

得点

/30

出典：2011 年度 東邦大学附属東邦高等学校

次の各問いに答えなさい。

- (1) 次の式を因数分解しなさい。

$$(7x - 9)^2 - (8x - 5)(5x - 2) - (2x + 3)(2x - 3)$$

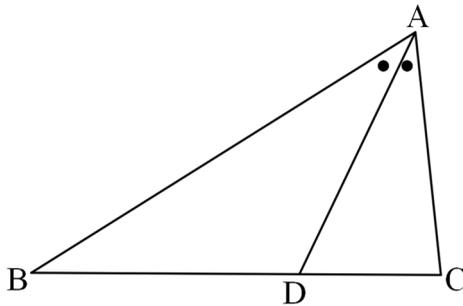
- (2) $a + b = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$, $ab = \frac{\sqrt{3}}{4}$ のとき, $a^2 + b^2$ の値を求めなさい。

- (3) $\sqrt{5}$ の小数部分を t とするとき, $t^2 + 4t + 5$ の値を求めなさい。

- (4) 3 つのサイコロを同時に投げるとき, 出る目の和が 6 の倍数となる確率を求めなさい。

- (5) $a^2 - a$ が 100 で割り切れるとき, 2 けたの正の奇数 a を求めなさい。

- (6) 下の図の $\triangle ABC$ において, $AB=4$, $AC=2$, $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とし, $DA=DB$ であるとします。このとき, DC の長さを求めなさい。



【解答例】**(1) (5点)****Point** x^2 , x , 定数項に注目して整理して計算する！

$$\begin{aligned}
& (7x - 9)^2 - (8x - 5)(5x - 2) - (2x + 3)(2x - 3) \\
&= (49 - 40 - 4)x^2 + (-126 + 41)x + (81 - 10 + 9) \\
&= 5x^2 - 85x + 80 \\
&= 5(x^2 - 17x + 16) \\
&= \mathbf{5(x - 16)(x - 1)}
\end{aligned}$$

(2) (5点)

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{1}$$

(3) (5点)

$$\sqrt{5} = 2.236 \dots \dots \text{なので, } \sqrt{5} = 2 + t$$

$$\text{両辺を2乗して, } 5 = t^2 + 4t + 4 \text{ 両辺1を足して, } t^2 + 4t + 5 = \mathbf{6}$$

(4) (5点)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

上記はサイコロ 2 つの出目の和である。それぞれに対して、和が 6 の倍数になる 3 つめのサイコロの出目は 1 通りである。例えば、1-1-4, 3-4-1..... など、2 つの出目の和に対して、3 つ目のサイコロの出目は必ず 1 通り。したがって、2 つのサイコロの出目の和が何であろうと、1/6 の確率で 6 の倍数となるから、

(5) (5点)

2けたの正の奇数 $a = 2m + 1$ ($m \geq 5$ の整数) と置き、

$$a^2 - a = (2m + 1)^2 - (2m + 1) = (2m + 1)(2m + 1 - 1) = 2m(2m + 1)$$

$2m$ は偶数、 $2m + 1$ は奇数である。

また、 $100 = 4 \times 25$ であるので、 $2m$ は4の倍数、 $2m + 1$ は25の倍数である必要がある。 $2m + 1$ が2桁の25の倍数になるとき、

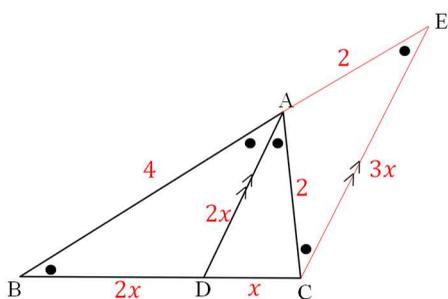
m	$2m$	$2m + 1$
12	24	25
×	×	50
37	74	75

このうち $2m$ が4の倍数となっているのは $m = 12$ のとき。

したがって、求める a の値は、

$$a = 25$$

(6) (5点)



角の二等分線公式を導く際によく引く補助線を引く。点 C から DA に平行な直線を引き、直線 BA との交点を E とする。

$DC = x$ と置くと、左図のように長さが表される。

$$\triangle ACE \sim \triangle DAB \text{ より, } 2x : 4 = 2 : 3x \quad 8 = 6x^2$$

$$x > 0 \text{ より, } x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

【コメント】 小問集合のくせに難問だらけです。特に、(2)、(3)、(5) は、それ専用の塾で対策が必要だと思われます。高月謝。(4) は私最初はがむしゃらに出目の和が6のとき.....と書きだしていたのですが、途中で色々気づきました。(6) は、実は有名直角三角形 (30° , 60° , 90°) が現れています。図は嘘です。ですが、角の二等分線公式を導く際の超有名な補助線引いとけば何とかなります。