

解いておくべき関数

範囲：中3関数，図形

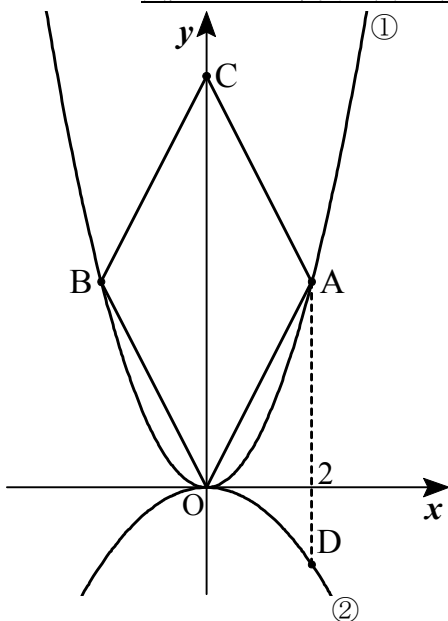
難易度：★★★★★

得点

/6

出典：2019年度 高知県

右の図において，①は関数 $y=x^2$ ，
 ②は関数 $y=ax^2$ のグラフであり， $a < 0$ である。点 A，B は①のグラフ上にあり，点 A の x 座標は 2 で，点 A と点 B の y 座標は等しい。点 C を y 軸上にとり，点 O と点 A，点 O と点 B，点 A と点 C，点 B と点 C をそれぞれ結んで，ひし形 OACB をつくる。また，②のグラフ上に，点 A と x 座標が等しい点 D をとる。このとき，次の (1) ～ (3) の問いに答えなさい。



- (1) 点 C の座標を求めよ。
- (2) x 軸上に点 $(3, 0)$ をとる。点 $(3, 0)$ を通り，ひし形 OACB の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。
- (3) 点 O と点 D を結んだ線分 OD を 1 辺とする正方形をつくる。この正方形とひし形 OACB の面積の比が $25:64$ であるとき， a の値を求めよ。

【解答例】

(1) (2点) (正答率 56.9%)

A (2, 4) B (-2, 4)

ひし形 (平行四辺形) の対角線はそれぞれの中点で交わるので, AB の中点 (0, 4) は, OC の中点にもなる。したがって, **C (0, 8)**

(2) (2点) (正答率 10.1%)

Point

平行四辺形 (ひし形, 長方形, 正方形も) の中心 (対角線の交点) を通る直線は, 平行四辺形を必ず 2 等分する!

ということで, (3, 0) (4, 0) を通る直線の式を求めればよい。切片 4 で,

傾き $-\frac{4}{3}$ だから, **$y = -\frac{4}{3}x + 4$**

(3) (2点) (正答率 0.5%)

D (2, 4a) なので, OD を 1 辺とする正方形の面積は $OD^2 = 4 + 16a^2$ (※)

ひし形 OACB の面積は, 対角線の長さがそれぞれ 4, 8 だから,

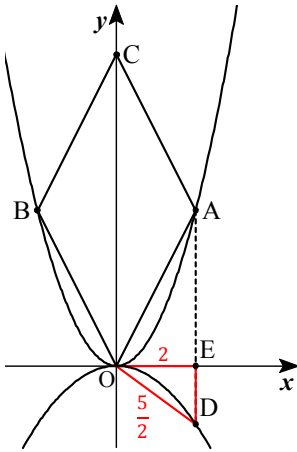
$\frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$ となる。よって, $25 : 64 = (4 + 16a^2) : 16$

$$64(4 + 16a^2) = 16 \times 25 \quad 4(4 + 16a^2) = 25 \quad 64a^2 = 9 \quad a^2 = \frac{9}{64}$$

$a < 0$ より, **$a = -\frac{3}{8}$**

(※) 正方形の面積は(1 辺の長さ)²で求められるので, $OD = \sqrt{4 + 16a^2}$ を 2 乗すれば良い。

< (3) メールフォームで貰った中学生らしい解き方 >



x 軸と AD の交点を E とする。 $OE=2$

ひし形 $OACB$ の面積は、対角線の長さがそれぞれ 4, 8 だから、 $\frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$ 、よって正方形

の面積は、 $16 \times \frac{25}{64} = \frac{25}{4}$ よって OD の長さは、

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ となる。三平方の定理より、

$$DE = \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{3}{2} \quad (3:4:5 \text{ の直角三角形})$$

$D\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ となるから、 $a = \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{4} = -\frac{3}{8}$

【コメント】

ひし形 (平行四辺形) について知らない、どうしようもない問題です。塾では絶対に触れますが、学校ではどうなのだろうか……。高知県のこの問題作った人、たぶん想像以上に正答率低くてビビったと思われます。

(3) は高校生以上には簡単ですが、確かに中学生には厳しいかも。OD の長さを文字で表すところで結構きついかもかもしれません。計算は簡単な工夫すれば良いだけです。

(2) に関して、

(類題) 2014 年度愛知県 : <https://hokkaimath.jp/blog-entry-65.html>

(難題 1) 2019 年度都立西 : <https://hokkaimath.jp/blog-entry-119.html>

(難題 2) 2019 年度日比谷 : <https://hokkaimath.jp/blog-entry-287.html>

があります。苦手な人は類題を、変わった人は難題でも解いてみてください。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>