実験する整数問題

範囲：整数問題	難易度：★×？	得点　　　　/6

出典：2022 年度　早稲田大学高等学院

$2022 = x\sqrt{y}(x^y + y^y)$　を満たす自然数 x，y の値をそれぞれ求めよ。

【解答例】

$$2022 = x\sqrt{y}(x^y + y^y) \cdots\cdots ①$$

①，右辺が積の形（ $x\sqrt{y} \times (x^y + y^y)$ ）となっているので，まずは，2022 を素因数分解してみる。

$$2022 = 2 \times 3 \times 337 \cdots\cdots ②$$

②，$x\sqrt{y}$ と $x^y + y^y$ に 2，3，337 を振り分けていく

ここで，$\sqrt{y}$ は自然数にする必要があるから，y＝1^2，2^2，3^2，6^2，337^2 となるが，y＝9 のとき，$y^y = 9^9$，とてもとてもでかい数(2022 を余裕で超える数)となるので，y は 1 か 4 となる。

$y = 1$ のとき，$2022 = x(x+1)$　これを満たす自然数 x は存在しない。

$y = 4$ のとき，$2022 = 2x(x^4 + 256)$

②より，$x = 3$ または$x = 337$が考えられるが，$x = 337$の場合，右辺はとてつもなく大きい数(2022 を余裕で超える数)となる。

$x = 3$ のとき，$2x = 6$，$x^4 + 256 = 81 + 256 = 337$となり，①を満たす。

$\boldsymbol{x = 3, y = 4}$

※狭い解答用紙に簡単な計算過程を書かなくてはならないようです。

$2022 = 2 \times 3 \times 337 \cdots ①$，$\sqrt{y}$は自然数で$y^y \leq 2022$ であるから，$y = 1^2, 2^2$

$y = 1$ のとき，$2022 = x(x+1)$，これを満たす自然数 x は存在しない。

$y = 4$ のとき，$2022 = 2x(x^4 + 256)$，①より$x = 3, 337$が考えられるが，

$337^4 > 2022$，$x = 3$ のとき，$2 \times 3(81 + 256) = 2 \times 3 \times 337$ となる。

$\boldsymbol{x = 3, y = 4}$　どのくらい書いたらいいんだろ？？

【コメント】

これ大問 1 問 1 なんですよ，中学生はもちろん高校生大学生でも面食らうでしょうね。一体どのような思考をしていたらこんな問題が出来上がるのでしょうか，不思議。どうやら一部界隈では，$337 = 3^4 + 4^4$は常識らしいです。怖い。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問 https://hokkaimath.jp/