

文字減らすヤバい関数

範囲：関数と計算

難易度：★×7

得点

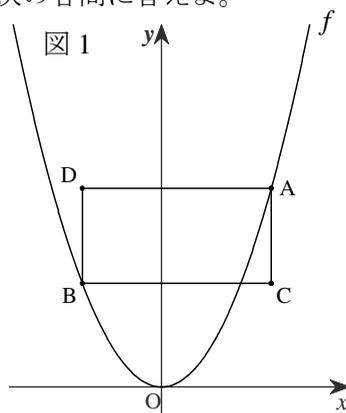
/25

出典：2020年度 戸山高校

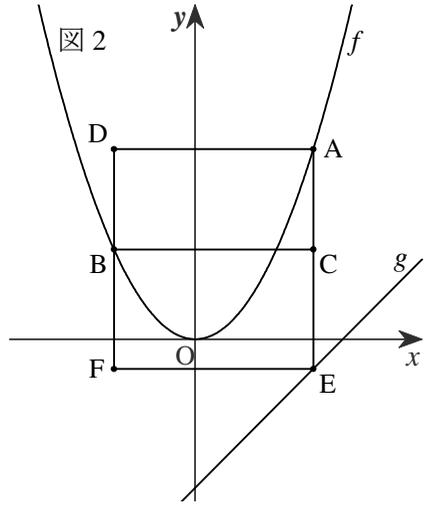
右の図1で、点Oは原点、曲線 f は関数 $y=x^2$ のグラフを表している。2点A, Bは、曲線 f 上にあり、 x 座標はそれぞれ a, b である。点Cは、 x 座標が点Aと等しく、 y 座標が点Bと等しい点であり、点Dは、 x 座標が点Bと等しく、 y 座標が点Aと等しい点である。 $a+b=m, a-b=n$ とするとき、 $m>0, n>0$ である。点Aと点D、点Dと点B、点Bと点C、点Cと点Aをそれぞれ結ぶ。原点から点(1, 0)までの距離、および原点から点(0, 1)までの距離をそれぞれ1 cmとして、次の各問に答えよ。

問1 2点A, Bを通る直線の切片が3で、点Aの x 座標が3であるとき、四角形ADBCの面積は何 cm^2 か。

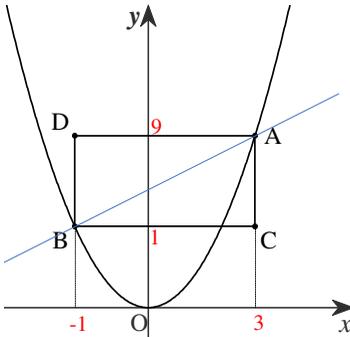
問2 m, n がともに自然数で、四角形ADBCの周の長さが20 cmとなるような m, n の値の組を全て求め、 (m, n) の形で表せ。



問3 右の図2は、図1において、直線 g を関数 $y=x-2$ のグラフとし、直線 g 上にあり x 座標が点 A と等しい点を E とし、 x 座標が点 B と等しく y 座標が点 E と等しい点を F とした場合を表している。点 B と点 F 、点 F と点 E 、点 E と点 C をそれぞれ結ぶ。四角形 $ADBC$ が正方形であり、正方形 $ADBC$ と、長方形 $ADFE$ の面積の比が $1:2$ であるとき、 m と a の値をそれぞれ求めよ。



ただし、答えだけでなく、答えを求める過程が分かるように、途中の式や計算なども書け。

【解答例】**問 1 (6 点)**

A (3, 9) で、切片 3 だから、
直線 AB は、 $y=2x+3$

$$2 = \frac{9-b^2}{3-b} = 3+b \text{ より、 } b = -1$$

B (-1, 1) となるので、長方形 ACBD の面積は、 $4 \times 8 = \mathbf{32 \text{ cm}^2}$

問 2 (7 点)

$n > 0$ より、 $a - b > 0$ 、また、 $m > 0$ より、 $a + b > 0$ なので、

$$BC = a - b = n, \quad AC = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = mn$$

長方形 ADBC の周の長さが 20 cm のとき、 $AC + BC = 10 \text{ cm}$

$$mn + n = n(m + 1) = 10$$

m, n は正の整数だから、 $(m, n) = (1, 5) (4, 2) (9, 1)$

問 3 (12 点)

Point 基本は文字を減らす方向で

$n > 0$ より、 $a - b > 0$ 、また、 $m > 0$ より、 $a + b > 0$ なので、

$$BC = a - b = n, \quad AC = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = mn$$

四角形 ADBC が正方形となるので $mn = n, n \neq 0$ なので、 $m = 1$

$$a + b = 1 \text{ となるから、 } b = -a + 1, \quad AC = n = a - b = 2a - 1$$

$$E(a, a-2), \quad (a^2 > a-2 \text{ より (図 2 より明らか)}) \quad AE = a^2 - a + 2$$

正方形 ADBC と長方形 ADFE の面積の比が 1 : 2 だから、

$$AE : AC = 2 : 1 \text{ よって、 } 2(2a - 1) = a^2 - a + 2$$

$$a^2 - 5a + 4 = 0, \quad (a - 4)(a - 1) = 0, \quad a = 4, a = 1$$

$$\mathbf{m = 1, a = 1, 4}$$

【コメント】

とても難しい問題ですね。難しいし、引っ掛かりそうな箇所もあります。高校生でも解けない人多そう。

問 1 は簡単なのですが、**聞かれているのは面積**です。注意。

問 2 は $a+b=m$, $a-b=n$ の誘導があるので、因数分解して整数問題に持っていくことは容易ですね。地味に気をつけてほしいのは、長方形 ADBC の周の長さが 20 cm のとき、**AC+BC は半分の 10 cm** ということです。20 にしないように。僕は最初そうして間違えそうになりました。

整数系の類題? : <https://hokkaimath.jp/blog-entry-21.html>

問 3 は難問です。まず最初の記述が辛いですね。BC の長さを出すために、 $a > b$ であることはしっかり書かなくてはなりません。また、気をつけてほしいのは、 **$a > b$ だからって、 $a^2 > b^2$ とは限りません**。

例 : $a = -2$, $b = -3$ のとき、 $a > b$ だが $a^2 > b^2$ ではない。

そのため、 $AC = a^2 - b^2$ であると言うために、 **$a + b > 0$** もしっかり記述しなくてはなりません。ここで 9 割の中学生は減点されるでしょう。戸山高校受けるような中学生はどうなのでしょう。

$m=1$ は無理なく出せるでしょうが、その後ですね。何してよいか分からなくなります。何個も何個も文字が出てきたら、まずやるべきことは「文字を減らす」ということです、.....このことは高校数学で私は習った気がします。自校作成校受けるならこれくらい知っておくということでしょうね。毎年戸山高校は数学が鬼です。し、 $b = -a + 1$ とし、文字を減らしましょう。それ以降は問題集でよく見る定番の問題です。

ちなみに図 2, どう見ても正方形に見えませんが、元の戸山の問題用紙も正方形には見えませんでした。そういうこともあります。

戸山の模範解答には $a^2 > a - 2$ が書かれていませんでした。図 2 より明らかだから省略しても良いでしょう。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>