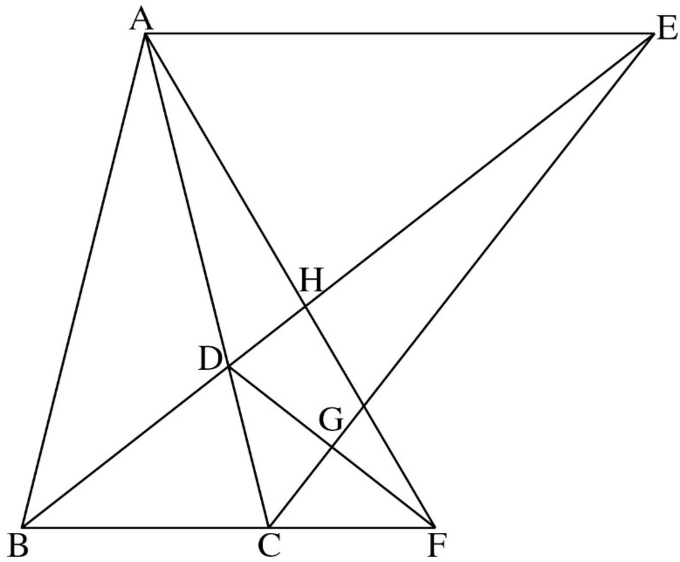
クソだっるい証明		
範囲：中 2，中 3 図形	難易度：★★★★★	得点　　　　　/10

出典：2018 年度三重県

次の図のように，AB＝AC の二等辺三角形 ABC があり，∠ABC の二等分線と辺 AC との交点を D とする。点 A から辺 BC に平行な直線をひき，直線 BD との交点を E とし，辺 BC を C の方に延長した直線上に BD＝DF となる点 F をとる。線分 DF と線分 CE の交点を G，線分 AF と線分 BE の交点を H とする。このとき，次の各問いに答えなさい。



（1）△CDG≡△CFG であることを証明しなさい。

（2）AB＝8 cm，BC＝4 cm のとき，次の各問いに答えなさい。

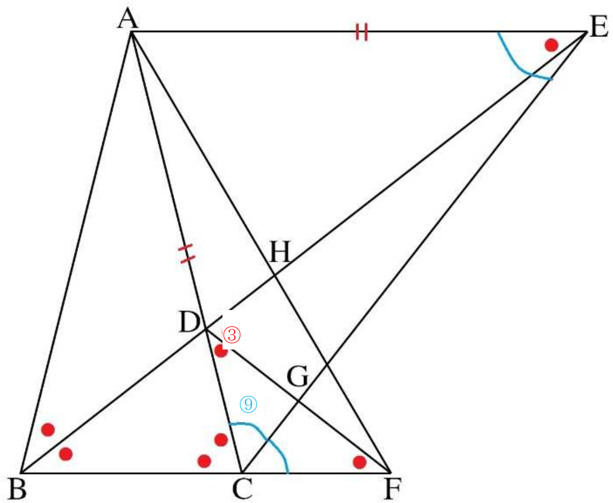
① 線分 CF の長さを求めなさい。

② 線分CGと線分GEの長さの比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。

③ △ADH と△CFG の面積の比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。

【解答例】

（1）（4 点）



△CDG と△CFG において，

仮定より，∠ABD＝∠CBD＝a…①とおく。

AB＝AC…②，DB＝DF より，二等辺三角形の底角は等しいから，

∠ABC＝∠ACB＝2a　∠DBC＝∠CFG＝a

また，三角形の外角は，それと隣り合わない 2 つの内角の和に等しいので，∠CDG＝∠ACB－∠CFG＝2a－a＝a

よって，∠CDG＝∠CFG…③　となり，2 つの角が等しいから，

△CDF は二等辺三角形なので，CD＝CF…④

AE//BC より，平行線の錯角は等しいから，

∠AEC＝∠FCG…⑤，∠CBD＝∠AEB＝a…⑥

①，⑥より，∠ABD＝∠AEB＝a となるから，2 つの角が等しいので，

△ABE は二等辺三角形となるから，AB＝AE…⑦

②，⑦より，AC＝AE となり，二等辺三角形の底角は等しいから，

∠AEC＝∠DCG…⑧　⑤，⑧より，∠DCG＝∠FCG…⑨

③，④，⑨より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，

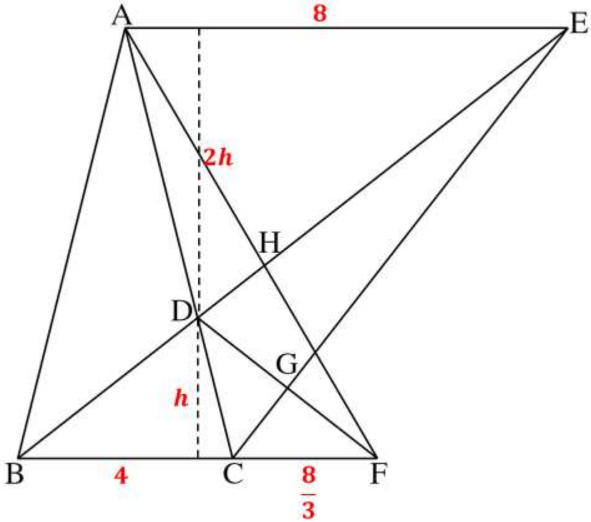
△CDG≡△CFG

（**2**）①（**2** 点）

BD は，∠ABC の二等分線なので，AB：BC＝AD：DC だから，

$2:1=(8-\mathrm{DC}):\mathrm{DC}$　$\mathrm{DC}=\dfrac{8}{3}$　$\mathrm{CD}=\mathrm{CF}$ なので，$\mathbf{CF=\dfrac{8}{3}\ cm}$

（**2**）②（**2** 点）



DG＝FG，∠DGE＝90°より，CG：GE＝△CFG：△EDG となる。

△DBC∽△DEA より, △DBC の BC を底辺としたときの高さを h とすると,

△DEA の EA を底辺としたときの高さは $2h$ となる。

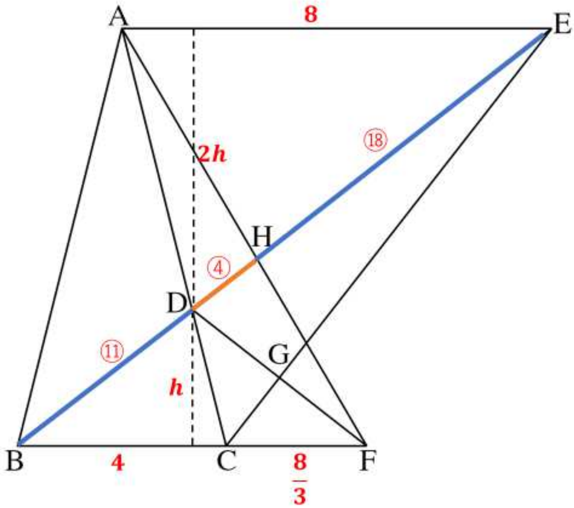
$$\triangle\mathrm{CFG}=\frac{1}{2}\times\frac{20}{3}\times h\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}h$$

$$\triangle\mathrm{EDG}=\triangle\mathrm{BCE}-\triangle\mathrm{DBF}+\triangle\mathrm{CFG}$$

$$=\frac{1}{2}\times4\times3h-\frac{10}{3}h+\frac{2}{3}h=\frac{10}{3}h$$　よって，$\mathbf{CG:GE=1:5}$

※ちなみに，$h=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$ であるが，使わない。

（2）③（2 点）



△DBC∽△DEAより，DB：DE＝1：2＝11：22

△HBF∽△HEA より，$\mathrm{HB}:\mathrm{HE}=\frac{20}{3}:8=5:6=15:18$

よって，DH：HE＝（15－11）：18＝4：18＝2：9

$\triangle\mathrm{ADH}=\frac{2}{11}\triangle\mathrm{ADE}=\frac{2}{11}\times\frac{1}{2}\times8\times2h=\frac{16}{11}h$

よって，$\triangle\mathrm{ADH}:\triangle\mathrm{CFG}=\frac{16}{11}:\frac{2}{3}=\frac{8}{11}:\frac{1}{3}=$ **24: 11**

【コメント】

（1）はただ長いだけ，同じことくりかえしの，くそだるい証明です。しかし，このくそだるい証明のおかげで，（2）が楽ちん？

適当に図を描いて遊んでいたら完成した問題，そんな気がします。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/