

よくみる図形（証明・直角）

範囲：平面図形

難易度：★★★☆☆

得点

/15

出典：2011年度 茨城県・岩手県

問1 図1, 図2のように, 1辺が6 cm の正方形 ABCD がある。2点 P, Q はそれぞれ辺 BC, CD 上の点であり, $BP=CQ$ を満たしながら動く。また, 線分 AP と線分 BQ との交点を R とする。このとき, 次の (1), (2) の問いに答えなさい。ただし, 円周率は π とする。

図1

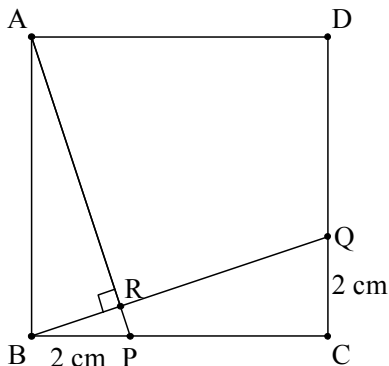
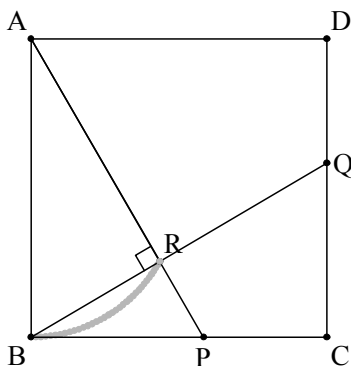


図2



(1) 図1のように, $BP=CQ=2$ cm のとき, 次の (I), (II) が成り立つ。

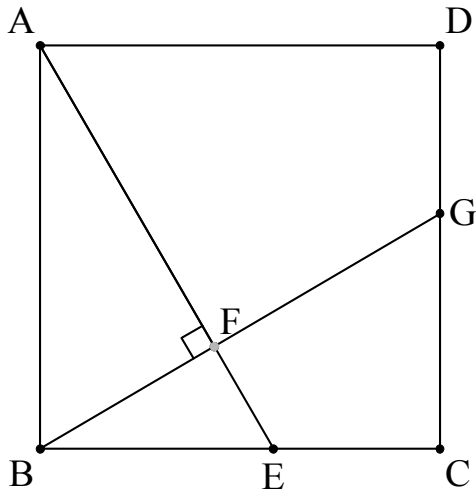
【 】に当てはまる数を書きなさい。

(I) $\angle ARB=90^\circ$ で, $\triangle ABR \sim \triangle BPR$ である。

(II) $\triangle ABR$ の面積と $\triangle BPR$ の面積の比は【 】:1 である。

(2) 図2のように, 2点 P, Q がそれぞれ2点 B, C を同時に出発して2点 C, D まで動くとき, 線分 AR が動いた跡にできる図形の面積を求めなさい。ただし, 図2は線分 AR が動いているようすを途中まで表したものである。

問2 正方形 $ABCD$ の辺 BC 上に B と異なる点 E をとります。 B から線分 AE に垂線 BF をひき、 BF の延長と辺 CD との交点を G とします。このとき、 $\triangle ABE \equiv \triangle BCG$ であることを証明しなさい。



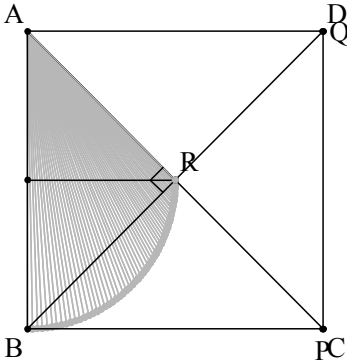
【解答例】

問 1 (1) (4 点)

$\triangle ABR \sim \triangle BPR$ で、 $AB : BP = 6 : 2 = 3 : 1$ であるから、面積比は、
 $3^2 : 1^2 = 9 : 1$

問 1 (2) (5 点)

常に $\angle ARB = 90^\circ$ であるので、点 R は、直径を AB とする円周上を動く。

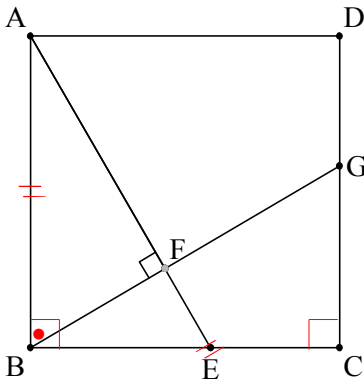


BP = 6 cm のとき、点 R は AC と BD との交点となる。

よって、求める面積は、

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 + 9\pi \times \frac{90}{360} = \frac{9}{2} + \frac{9}{4}\pi \text{ cm}^2$$

問 2 (6 点)



$\triangle ABE$ と $\triangle BCG$ において、
 四角形 ABCD は正方形だから、

AB = BC ……①

$\angle ABE = \angle BCG = 90^\circ$ ……②

仮定より、 $\angle AFB = 90^\circ$

$\angle BAE = 90^\circ - \angle ABF$ (※1)

$\angle CBG = 90^\circ - \angle ABF$

よって、 $\angle BAE = \angle CBG$ ……③

①, ②, ③より、1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、
 $\triangle ABE \cong \triangle BCG$

(※1) $\triangle ABF$ において、 $\angle BAE = 180^\circ - \angle AFB - \angle ABF = 90^\circ - \angle ABF$ である。証明の際は、上記のように書くだけで良い。定期テストレベルらしいが念のため。

【コメント】

過去問演習の際には、典型問題の演習がいかに関心のか思い知らされる問題です。入試問題を作成する際、教科書はもちろん、過去の様々な入試問題も参考にされます。過去の入試で良い問題があったら、同じ図使われることもありますし、何なら同い年でこのように被ることがあります。

(恐らく、大半の塾講師は) どんな年にどんな県でどんな問題が出たのか、うっすらと覚えているはずなので、質問すれば、中学生に適切な問題演習の指示が出せます。恐らく。少なくとも自分の都道府県の問題は全て覚えているはず。そういう面でプロなので、お金払って学習アドバイスを受けるのは、受験を突破する上では良い投資かもしれません。

問1は茨城県の問題。本当は(2)までにもっと出題したかったのですが、配点が大変なことになるので、(1)でヒントを与えまくっていますね。(2)は、 $\angle ARB = 90^\circ$ から、円周角の定理思い出せるかどうかです。思い出せなくても「円周率を π 」だとか、不自然に描かれた円弧でたぶん大丈夫。

問2は岩手県の証明問題。(それなりにレベルの高い)中学校の定期テストで出されそうな問題を、少し捻った問題ですね。これぐらいは解けておくと後々楽です。北海道では、学力テストABCに出題されそう。

今回よく見る図形として問題2つまとめてみましたが、道コンの市販予想問題集にも、同じ図形載っていました。道コンのは合同証明→相似証明とちょっとシンドイ問題ですね。たぶん、道コンは、こういう問題を参考にして予想問題作成したのでしょうかね。

【作成】

高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>